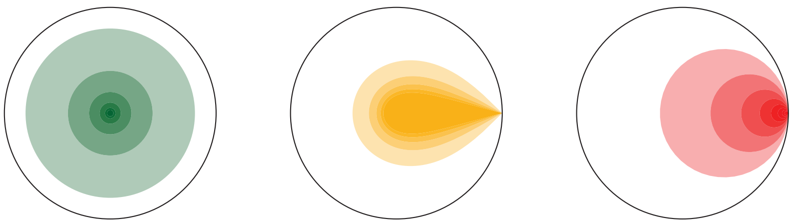
Semigroupes d'opérateurs de composition sur des espaces de Hardy pondérés

Corentin Avicou

Institut Camille Jordan
UMR 5208 du CNRS

Semigroupes d'opérateurs de composition sur des espaces de Hardy pondérés



Corentin Avicou

Thèse de doctorat

Université Claude Bernard Lyon 1

Université Claude Bernard Lyon 1
École doctorale **InfoMath**, ED 512
Spécialité : **Mathématiques**
N. d'ordre 228–2015

Semigroupes d'opérateurs de composition sur des espaces de Hardy pondérés

Thèse de doctorat

Soutenue publiquement le 9 novembre 2015 par

Corentin Avicou

devant le jury composé de :

Wolfgang Arendt	Universität Ulm	Rapporteur
Isabelle Chalendar	Université Lyon 1	Directrice de thèse
Sophie Grivaux	Université de Picardie	Examinatrice
Pascal Lefèvre	Université d'Artois	Rapporteur
Jonathan Partington	University of Leeds	Examinateur

À Pierre et Renée.

Merci

La rédaction de ce mémoire de thèse aura été pour moi l'occasion de faire un bilan sur les trois années écoulées. Un bilan mathématique, bien sûr (s'il vous intéresse, je vous invite à lire les quelques pages qui suivent), mais aussi un bilan humain. Durant ces années, j'ai eu la chance de côtoyer des personnes qui toutes, à leur façon, ont contribué à rendre ces moments fantastiques.

Pour commencer, ma directrice, Isabelle Chalendar a accepté avec enthousiasme d'encadrer mes travaux depuis mes stages de Master jusqu'à mes études doctorales. Elle a réussi à me présenter l'ensemble des bons aspects de la recherche dans un véritable climat de bienveillance et de bonne humeur. Sa patience aura été infaillible.

Wolfgang Arendt et Pascal Lefèvre ont tous deux accepté de rapporter cette thèse. Je leur suis reconnaissant de l'application avec laquelle ils ont relu ce document ; traquant les fautes, les imprécisions et les coquilles de celui-ci, me permettant ainsi d'y apporter d'utiles améliorations. J'ai apprécié leurs remarques toujours pertinentes ainsi que l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux.

Au cours des trois dernières années, j'ai eu le plaisir de travailler avec Jonathan Partington. J'ai pu apprécier sa gentillesse lors de nos nombreuses discussions, mathématiques ou non. Lui encore a su me communiquer sa passion pour ce domaine. Jonathan Partington et Sophie Grivaux me font l'honneur de leur présence dans mon jury.

Je garderai longtemps en mémoire les figures emblématiques de l'institut Camille Jordan et de l'école doctorale parmi lesquelles quelques interlocuteurs privilégiés, toujours disponibles et d'une efficacité redoutable. Je pense notamment à Elisabeth Mironescu, Laurent Azema, Renée El Melhem, Vincent Farget, Maria Konieczny et Aurélie Reymond.

Le bureau 219, bien sûr, est un lieu que je recommanderai longtemps. Outre son orientation géographique parfaite pour supporter les grandes chaleurs estivales, et la présence régulière d'une importante quantité de sucre, il est peuplé de personnages rigolos et hauts en couleurs. Certains sont partis on ne sait où : Alain, Alexis, Jean-Baptiste, Zeya, Zhicong ; d'autres, comme moi, s'évertuent à y rester : Benjamin, Hassan, Mathias, Maxime ; et d'autres encore cherchent à s'y installer : Petit Hugo, Simon, Yannick. Mais il est des personnes moins chanceuses, qui n'ont pas eu le plaisir d'y trouver une place, je pense notamment à Ariane, Cécilia, Colin, Ivan, Luigia, Maxime, Nadja, Niels, Quentin, Simon, Tanya et Xiaolin. Les adeptes des déjeuners anticipés et de l'étude des probabilités discrètes ont très largement su faire de ce laboratoire un lieu où l'on vient chaque jour avec le sourire : Adriane et son verbe, Agathe et son rire, Benoit et ses dimensions, Bérénice et sa gentillesse, Blanche et sa rapidité, Coline et son mutisme, Élodie et son accueil, François et ses élastiques jaunes, François et son plan, François et son épopée, Marielle et sa bonne humeur, Niccolo et ses collègues, Thomas et sa philanthropie, ainsi que leurs partenaires respectifs.

En dehors du laboratoire et dans un contexte le plus souvent musical, j'ai eu la chance de fréquenter des personnes superbes : Anne-Cécile, Antoine, Benjamin, Benjamin, Benjamin, Brunelle, Frédéric, Gaëlle, Isabelle, Juliette, Marie, Marie, Marie-Alice (et je ne suis même pas bègue), Morgane et Valérie.

Il me faut souligner que ce manuscrit ne serait pas ce qu'il est sans la relecture attentive (et parfois humoristique) qu'en ont faite Adriane et Augustin.

Bien que ne partageant pas toujours mon engouement pour les mathématiques, ma famille m'a sans cesse encouragé et soutenu. Enfin, j'ai une pensée pour Cécile (et pour sa tribu) qui m'accompagne depuis quelques années maintenant et qui a su m'épauler à chaque instant.

Pour tout cela, à toutes et à tous [1], je vous dois beaucoup : MERCI !

1. Si votre nom n'apparait pas, ce n'est pas forcément volontaire, veuillez m'en excuser.

Table des matières

Introduction

L'étude des opérateurs de composition sur divers espaces de fonctions analytiques a donné lieu à de trop nombreuses publications pour qu'on puisse espérer en faire une liste exhaustive. Puisque ce domaine fourmille depuis plus de cinquante ans, beaucoup de questions ont émergé, ont été résolues ou sont restées partiellement ouvertes. Les travaux qui suivent sont établis sur l'espace de Hardy du disque $H^2(\mathbb{D})$ ou plus généralement sur des espaces de Hardy pondérés $H^2(\beta)$. Dans ces espaces, on ne sait pas, en toute généralité, calculer la norme d'un opérateur de composition donné. Naturellement, beaucoup a été fait en ce sens. Sur l'espace $H^2(\mathbb{D})$ notamment, il est connu qu'un tel opérateur C_φ est toujours borné et on a une majoration et une minoration explicite de sa norme dépendant uniquement de $|\varphi(0)|$. Toutefois, il est très difficile d'avoir mieux qu'un simple encadrement.

Dans l'article de Gallardo et Partington [27], les auteurs ont, pour la première fois, l'idée d'utiliser des semigroupes pour calculer la norme de certains opérateurs de composition. En effet, les normes des éléments d'un semigroupe sont directement liées aux propriétés spectrales d'un opérateur donné. Cet opérateur est appelé générateur infinitésimal du semigroupe. C'est ainsi qu'ils calculent explicitement la norme des opérateurs de composition par des automorphismes, dont les éléments peuvent effectivement constituer un semigroupe. Cette norme était bien connue dans l'espace de Hardy du disque, mais leur approche reste valable dans toute une famille d'espaces de Hardy pondérés, ce qui constitue une avancée notable dans ce domaine.

C'est précisément l'idée novatrice de cet article qui a motivé la présente étude. L'objectif du premier chapitre est de présenter les diverses notions en jeu jusqu'à voir comment appliquer leur méthode au calcul explicite de diverses classes d'opérateurs de composition sur des espaces de Hardy pondérés. En particulier, dans l'article de Siskakis [50], l'auteur donne une liste d'exemples de tels semigroupes. Nous calculerons la norme de la majorité de ces exemples.

Sachant calculer la norme des opérateurs de composition issus d'un semigroupe, il apparaît naturel de vouloir utiliser cette méthode pour calculer la norme de tout opérateur de composition. À cette fin, il faut réussir à voir tout opérateur de composition C_φ comme un élément de semigroupe. Autrement dit, il faut trouver une fonction $T : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(X)$ satisfaisant, entre autres, $T(0) = \mathrm{I}$ et $T(1) = C_\varphi$, et donc en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on doit avoir $T(n) = C_{\varphi^n}$. Pour poursuivre, si une telle fonction existe, l'opérateur $T(\frac{1}{n})$ pour un $n \in \mathbb{N}$ donné impose l'existence d'une puissance fractionnaire $\varphi^{\frac{1}{n}}$ de la fonction analytique φ.

Déterminer les fonctions analytiques admettant des puissances fractionnaires est un problème difficile à l'origine de nombreux articles, voir par exemple, [23, 31, 42]. Ce problème est d'ailleurs toujours ouvert. Aussi, la méthode présentée ci-dessus ne nous permettra pas de calculer la norme des opérateurs de composition qui ne sont pas directement issus d'un semigroupe. Un autre obstacle à cette méthode est que les symboles des opérateurs de composition issus de semigroupes doivent nécessairement être des fonctions analytiques injectives. Par conséquent, nous n'avons aucun espoir de calculer, à l'aide de cette méthode, la norme d'un opérateur de composition dont le symbole n'est pas injectif. Telles sont les limites de notre étude.

Les semigroupes d'opérateurs de composition ont été étudiés pour la première fois par Berkson et Porta dans l'article [14]. Pour leur étude, ils se placent sur les espaces de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ du disque et $H^p(\mathbb{C}_+)$ du demi-plan avec $1 \leqslant p < \infty$. Ils démontrent pour la première fois que le semiflot des symboles d'un semigroupe d'opérateurs de composition admet un générateur infinitésimal bien défini. De plus, ils donnent une caractérisation complète de ce générateur à l'aide du point de Denjoy-Wolff du semiflot. L'étude de la compacité du semigroupe ou du spectre de son générateur, l'étude de ces semigroupes sur d'autres espaces de fonctions tels que les espaces de Dirichlet ou de Bergman pour ne citer que ceux-là, sont autant de sujets d'intérêt pour de nombreuses publications récentes sur ce domaine. Le lecteur intéressé pourra notamment se référer à celles de Abate [1, 2], Aleman [5], Pommerenke et coll. [17, 40], ou encore Shoikhet et coll. [3, 46] et bien sur, à celles, très nombreuses, de Siskakis [48, 49, 50, 47].

Le deuxième chapitre présente les résultats de l'article [11] en collaboration avec Isabelle Chalendar et Jonathan R. Partington. Dans celui-ci nous proposons un nouvelle caractérisation des générateurs de semiflots de fonctions analytiques. Cette fois-ci, et contrairement à la caractérisation proposée par Berkson et Porta [14] ou par Abate [2], notre condition ne fait plus intervenir le point de Denjoy-Wolff du semiflot et ne porte que sur le supremum essentiel du générateur sur le cercle unité. Ainsi nous obtenons un test simple à effectuer sur une fonction analytique G pour déterminer si, oui ou non, elle engendre un semiflot de fonctions analytiques. Ce sera l'objet de la proposition 2.4 : la fonction analytique G engendre un semiflot si et seulement si

$$\operatorname*{ess\,sup}_{z\in\mathbb{T}} \operatorname{Re}(\overline{z}G(z)) \leqslant 0.$$

Un corollaire immédiat de cette proposition est que le semigroupe d'opérateurs de composition ainsi engendré est un groupe si et seulement si la fonction $z \mapsto \overline{z}G(z)$ est à valeurs sur l'axe des imaginaires purs. Une des idées clé de ce résultat repose sur l'étude de la partie réelle de l'image numérique du générateur en utilisant les noyaux reproduisants normalisés de $H^2(\mathbb{D})$ ou de Dirichlet $\mathcal{D}$. En outre, nous avons pu montrer de cette façon que les seuls semigroupes quasi-contractifs sur l'espace de Hardy dont le générateur est de la forme $f \mapsto G \times f'$ sont les semigroupes d'opérateurs de composition (et réciproquement).

C'est une classe un peu particulière de semigroupe qui motivera le troisième chapitre : les semigroupes holomorphes. Un semigroupe est une fonction définie sur la demi-droite $\mathbb{R}_+$, mais il se peut qu'elle soit définie sur un domaine plus grand. En l'occurrence, sur un secteur angulaire $\Sigma_\theta = \{re^{i\alpha} \in \mathbb{C},\ r > 0, \alpha \in]-\theta;\theta[\}$. Les semigroupes admettant une extension analytique sur Σ_θ qui est bornée au voisinage de l'origine sont dits holomorphes. Extraordinairement peu de choses sont connues sur les semigroupes d'opérateurs de composition holomorphes. Pourtant, dans les articles récents de Arendt et coll. [6, 7], les auteurs donnent une extension du théorème de Lumer-Phillips adaptée aux semigroupes holomorphes. Grâce à leurs travaux, nous pourrons établir une caractérisation des semigroupes d'opérateurs de composition qui sont holomorphes à l'aide d'une condition simple portant uniquement sur le générateur infinitésimal du semiflot associé. Cette condition fait l'objet du corollaire 3.9 : l'opérateur A engendre un semigroupe holomorphe d'opérateurs de composition sur $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement s'il existe $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{z\in\mathbb{T}} \operatorname{Re}(e^{\pm i\theta}\overline{z}G(z)) \leqslant 0.$$

En particulier, nous verrons que sous cette condition, c'est le semiflot lui-même qui admet une extension analytique.

L'étude des semigroupes d'opérateurs de composition à partir de leurs générateurs suscite un élan de motivation. Sachant que de nombreuses propriétés d'un semigroupe peuvent être déduites des propriétés de son générateur, peut-on dire plus dans le cas des opérateurs de composition ? En particulier, que dire de la compacité, peut-on détecter la compacité d'un semigroupe à partir de son générateur ? Cette question fait l'objet du quatrième chapitre. Il faudra alors faire attention à la notion de compacité considérée : on peut parler d'opérateur de composition compact ou de semigroupe compact. De nombreux critères existent pour affirmer qu'un opérateur de composition est compact, voir par exemple [19]. Ceux-ci s'expriment en fonction du comportement du symbole de l'opérateur de composition au voisinage du bord de $\mathbb{D}$. Dans notre cas et puisque les symboles sont injectifs, ce critère portera uniquement sur la dérivée angulaire du symbole. Par exemple, le théorème 4.8 et son corollaire donnent des conditions pour être compact et même Hilbert-Schmidt ici. De même la proposition 4.10 offre une condition pour ne pas être compact. Du côté des semigroupes, on voit aisément que, si un élément $T(t)$ d'un semigroupe T est compact alors, pour tout $h > 0$, l'application $T(t+h)$ est également compacte. Ainsi, on distinguera trois types de semigroupes, ceux qui sont compacts pour tout $t > 0$; ceux qui sont compacts à partir d'un certain moment ; ceux qui ne sont jamais compacts. Cette compacité est liée à celle d'un opérateur appelé résolvante et les travaux de Siskakis [48] donne une équivalence entre la compacité de la résolvante et le comportement du générateur au bord de $\mathbb{D}$. Ceci nous permettra d'établir le théorème 4.26. Les troisième et quatrième chapitres ont donné lieu à l'article [10] en collaboration avec Isabelle Chalendar et Jonathan R. Partington.

Le cinquième et dernier chapitre présente des contributions lorsque le disque est remplacé par le demi-plan ainsi que quelques perspectives de recherche. Dans le cas où le domaine de définition des symboles ne serait plus le disque $\mathbb{D}$ mais un autre domaine Ω adapté, il apparaît comme naturel de vouloir étendre les travaux présentés ici. Toutefois ce changement de domaine modifie considérablement le comportement des opérateurs de composition. Nous présenterons deux façons de procéder. La première consistera à regarder ce qui se passe, en repartant depuis les bases, sur l'espace de Hardy d'un autre domaine. L'exemple où $\Omega = \mathbb{C}_+$ (voir [14]) montre à quel point les différences peuvent survenir puisque par exemple, dans ce cas, aucun opérateur de composition ne sera compact. La seconde façon de faire est de considérer une application transportant $\mathbb{D}$ sur Ω et d'observer comment les propriétés des semigroupes d'opérateurs de composition sont ainsi altérées. Puisque les semigroupes, car ce seront des semigroupes, ainsi obtenus seront constitués d'opérateurs de composition à poids, nous citerons alors les résultats de König [32] pour énoncer des caractérisations d'un opérateur suffisantes pour affirmer qu'il engendre un tel semigroupe.

Chapitre 1

Généralités

L'objectif de ce chapitre est de donner les bases nécessaires pour appréhender les notions que nous manipulerons tout au long de ce manuscrit. Nous en présenterons les définitions, quelques exemples simples, ainsi que les propriétés directement utiles pour la suite. Ainsi, nous commencerons par définir (dans cet ordre) les espaces de Hardy pondérés sur le disque unité ouvert $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$, qui incluent les espaces de Hardy et de Dirichlet ; les opérateurs de composition ; les semigroupes et leurs générateurs. Puis, sachant que l'une des motivations principales de ces travaux est le calcul explicite de la norme d'opérateurs de composition, nous allons dans un second temps présenter comment l'introduction des semigroupes permet de parvenir à nos fins.

1.1 Définitions

1.1.1 Espaces de Hardy

Notre objectif sera d'étudier des opérateurs sur des espaces de fonctions analytiques classiques tels que l'espace de Hardy ou l'espace de Dirichlet. Ces espaces sont des cas particuliers d'espaces de Hardy pondérés.

Définition 1.1. Soit $\beta = (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que

$$\liminf (\beta_n)^{\frac{1}{n}} \geqslant 1.$$

On note $H^2(\beta)$ l'espace de Hilbert des fonctions analytiques

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

sur $\mathbb{D}$ pour lesquelles la norme suivante est finie

$$\|f\|_\beta = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \beta_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Cet espace est appelé *espace de Hardy de poids* β et la norme précédente est induite par le produit hilbertien

$$\left\langle \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n, \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n \right\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \overline{b_n} \beta_n^2.$$

Le cas $\beta_n \equiv 1$ définit l'*espace de Hardy* $H^2(\mathbb{D})$.
Le cas $\beta_0 = 1$ et $\beta_n = \sqrt{n}$ pour $n \geqslant 1$ définit l'*espace de Dirichlet* $\mathcal{D}$. En particulier, $\mathcal{D} \subset H^2(\mathbb{D})$.

La fonction analytique définie par $z \mapsto \sum_{n\geqslant 0}(n\beta_n)^{-1}z^n$ appartient à l'espace $H^2(\beta)$ ainsi, la condition $\liminf(\beta_n)^{\frac{1}{n}} \geqslant 1$ apparaît naturellement afin d'assurer que cette série défini une fonction analytique sur $\mathbb{D}$ (voir [26]).

L'espace $H^2(\mathbb{D})$ admet de nombreuses définitions équivalentes. La « bonne » définition, au sens où elle permettra de définir les espaces $H^p(\mathbb{D})$ avec $p > 0$, est une définition à l'aide d'intégrales que nous allons présenter maintenant.

Proposition 1.2. *Soit f une fonction analytique sur $\mathbb{D}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. La fonction f est élément de $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si la norme suivante est finie*

$$\|f\|^2 := \sup_{0\leqslant r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \, dt.$$

Démonstration. Soit f une fonction analytique sur $\mathbb{D}$ et soit $0 \leqslant r < 1$. On note

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

On a :

$$|f(re^{it})|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_n \overline{a_m} r^{n+m} e^{i(n-m)t}.$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

Ainsi, si $f \in H^2(\mathbb{D})$, alors le second membre de cette égalité est borné par $\|f\|^2$ pour tout $r \in [0;1[$. Réciproquement, si $f \notin H^2(\mathbb{D})$, alors le second membre tend vers l'infini lorsque r tend vers 1. $\square$

On peut noter qu'on a montré en réalité que

$$\|f\|^2 := \limsup_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \, dt < \infty.$$

Les polynômes sont évidemment toujours des éléments des espaces de Hardy pondérés. En outre, la famille des monômes $(e_n : z \mapsto z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une base hilbertienne pour chacun de ces espaces. À l'aide de la définition intégrale, on voit clairement que les fonctions analytiques bornées sont également dans l'espace $H^2(\mathbb{D})$. Autrement dit,

$$H^\infty(\mathbb{D}) = \{f \in \mathcal{H}\mathrm{ol}(\mathbb{D}), f \text{ bornée}\} \subset H^2(\mathbb{D}).$$

Si on se place sur un espace $H^2(\beta)$, une autre famille de fonctions jouera également un rôle important : pour $w \in \mathbb{D}$, on définit

$$k_w(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\overline{w}^n}{\beta_n^2} z^n.$$

Ces fonctions n'appartiennent pas a priori à l'espace $H^2(\beta)$. C'est le cas, par définition, si pour tout $w \in \mathbb{D}$,

$$k_w(w) = \|k_w\|_\beta^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|w|^{2n}}{\beta_n^2} < \infty,$$

ce qui est équivalent à la condition plus explicite

$$\liminf(\beta_n)^{\frac{1}{n}} \geqslant 1.$$

Sous cette hypothèse sur la suite β, les fonctions k_w sont appelées *noyaux reproduisants* car elles vérifient la propriété remarquable que, pour tout $f \in H^2(\beta)$ et tout $w \in \mathbb{D}$,

$$\langle f, k_w \rangle = f(w).$$

En outre, dans ce cas, l'espace $H^2(\beta)$ est dit *espace à noyaux reproduisants.*

Il est une dernière propriété de ces espaces de Hardy pondérés qu'il faut énoncer. Pour une espace de Banach X, on note $\mathcal{L}(X)$ l'ensemble des applications linéaires continues sur X. Si une fonction analytique ψ est bornée c'est-à-dire $\psi \in H^\infty(\mathbb{D})$, alors l'opérateur $M_\psi \in \mathcal{L}(H^2(\beta))$ de multiplication par ψ est borné sur $H^2(\beta)$. Autrement dit, les fonctions de $H^\infty(\mathbb{D})$ sont des multiplicateurs de $H^2(\beta)$. Pour montrer cela nous aurons besoin de l'inégalité de von Neumann.

Lemme 1.3 (Inégalité de von Neumann)**.** *Soit $T \in \mathcal{L}(H^2(\beta))$ tel que $\|T\| < \infty$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On a*

$$\|P(T)\| \leqslant \|P\|_{\infty,\|T\|} := \sup\{|P(z)|,\ |z| < \|T\|\}.$$

Démonstration.

– On pose, pour $r \in \left[0; \frac{1}{\|T\|}\right[$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} K_{r,t}(T) &= \sum_{n\geqslant 0} r^n e^{-int} T^n + \sum_{n>0} r^n e^{int} T^{*n} \\ &= (\mathrm{I} - re^{it}T^*)^{-1}(\mathrm{I} - r^2 T^* T)(I - re^{-it}T)^{-1}. \end{aligned}$$

L'opérateur $K_{r,t}$ est appelé noyau de Poisson et est auto-adjoint.

– On a pour tout $re^{it} \in D(0, \frac{1}{\|T\|})$, $K_{r,t}(T) \geqslant 0$. En effet, on a $K_{r,t}(T) \geqslant 0$ si et seulement si pour tout $x \in H^2(\beta)$,

$$0 \leqslant \langle K_{r,t}(T)x, x\rangle = \langle (\mathrm{I} - r^2 T^* T)y, y\rangle = \|y\|^2 - r^2\|Ty\|^2,$$

où $y = (I - re^{-it}T)^{-1}x$. Le résultat découle alors de la surjectivité de l'opérateur $(I - re^{-it}T)^{-1}$.

– Notant $P(X)=\sum_{k=0}^N a_kX^k$ et $s=\|T\|$ on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} P(se^{it})K_{r,t}(T)dt &= \int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=0}^N a_ks^ke^{ikt}\right)\left(\sum_{n\geqslant 0} r^ne^{-int}T^n+\sum_{n>0} r^ne^{int}T^{*n}\right)dt\\
&= \sum_{k=0}^N\sum_{n\geqslant 0} a_ks^kr^nT^n\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t}dt\\
&\quad +\sum_{k=0}^N\sum_{n>0} a_ks^kr^nT^{*n}\int_0^{2\pi} e^{i(k+n)t}dt\\
&= \sum_{k=0}^N\int_0^{2\pi} a_ks^kr^kT^kdt\\
&= 2\pi P(srT).
\end{aligned}$$

– Soient $x,y\in H^2(\beta)$. On a : $\forall r\in[0;\frac{1}{\|T\|}[$,

$$\begin{aligned}
\langle P(srT)x,y\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(se^{it})\langle K_{r,t}(T)x,y\rangle dt\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(se^{it})\left\langle \sqrt{K_{r,t}(T)}x,\sqrt{K_{r,t}(T)}y\right\rangle dt\\
|\langle P(srT)x,y\rangle| &\leqslant \frac{\|P\|_{\infty,\|T\|}}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\left\|\sqrt{K_{r,t}(T)}x\right\|_\beta^2dt\right)^{\frac12}\left(\int_0^{2\pi}\left\|\sqrt{K_{r,t}(T)}y\right\|_\beta^2dt\right)^{\frac12}\\
&= \frac{\|P\|_{\infty,\|T\|}}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\langle K_{r,t}(T)x,x\rangle dt\right)^{\frac12}\left(\int_0^{2\pi}\langle K_{r,t}(T)y,y\rangle dt\right)^{\frac12}\\
&= \frac{\|P\|_{\infty,\|T\|}}{2\pi}\left(2\pi\|x\|_\beta^2\right)^{\frac12}\left(2\pi\|y\|_\beta^2\right)^{\frac12}\\
&= \|P\|_{\infty,\|T\|}\|x\|_\beta\|y\|_\beta.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|P(srT)\|\leqslant\|P\|_{\infty,\|T\|}.$$

– Enfin, on a $\|P(srT)-P(T)\|\to 0$ quand $r\to\frac{1}{\|T\|}$, d'où le résultat.

□

Proposition 1.4. *Soit β une suite décroissante de réels positifs telle que* $\liminf(\beta_n)^{\frac1n}\geqslant 1$. *Soit $(f,g)\in H^2(\beta)\times H^\infty(\mathbb{D})$. Alors $f\cdot g\in H^2(\beta)$.*

Démonstration. On note $S=M_z$ le *shift* sur $H^2(\beta)$: si $f(z)=\sum_{n=0}^\infty a_nz^n$, alors $Sf(z)=\sum_{n=0}^\infty a_nz^{n+1}$. Dans le cas particulier où g est un polynôme, on a : $\|M_g\|=\|g(S)\|\leqslant\|g\|_{\infty,\mathbb{D}}$ par le lemme 1.3. Maintenant, si g est analytique, on considère les sommes de Féjer σ_n de sa série (qui sont des polynômes). On a alors, par le théorème de convergence de Féjer, $\|M_{\sigma_n}\|\leqslant\|\sigma_n\|_\infty\leqslant\|g\|_\infty$ et M_{σ_n} tend vers M_g. Cela montre que $\|M_g\|$ est bornée. □

1.1.2 Opérateurs de composition

Définition 1.5. Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique. On définit l'*opérateur de composition C_φ de symbole φ* par : pour toute fonction $f \in H^2(\beta)$,

$$C_\varphi(f) = f \circ \varphi.$$

Un tel opérateur est clairement linéaire et à valeurs dans l'ensemble des fonctions analytiques. La composée de deux opérateurs de composition est un opérateur de composition avec la relation $C_\varphi \circ C_\psi = C_{\psi\circ\varphi}$. De plus, si k_w est un noyau reproduisant $C_\varphi^* k_w = k_{\varphi(w)}$. En effet, pour $f \in H^2(\beta)$,

$$\langle f, C_\varphi^* k_w\rangle = \langle C_\varphi f, k_w\rangle = f(\varphi(w)) = \langle f, k_{\varphi(w)}\rangle.$$

En revanche, il n'est pas clair (et faux en général) que $H^2(\beta)$ soit stable par C_φ. C'est vrai dans l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$, nous y reviendrons avec la proposition 1.7. Par ailleurs, vu que $C_\varphi e_0 = e_0$, on a toujours $\|C_\varphi\| \geqslant 1$. Il est même possible de dire mieux : pour $a \in \mathbb{D}$,

$$\|C_\varphi\| \geqslant \|C_\varphi^*\| \geqslant \frac{\|C_\varphi^* k_a\|}{\|k_a\|} = \frac{\|k_{\varphi(a)}\|}{\|k_a\|} = \left(\frac{k_{\varphi(a)}(\varphi(a))}{k_a(a)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On en déduit, en posant $a = 0$, que si $\|C_\varphi\|$ vaut 1 alors $\varphi(0) = 0$, et la réciproque est vraie dans $H^2(\mathbb{D})$ comme l'affirme la proposition suivante due à Shapiro (voir [44]).

Proposition 1.6. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique. Si $\varphi(0) = 0$ alors $\|C_\varphi\| \leqslant 1$.*

Démonstration. On note S le *shift inverse* : si $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$, alors $Sf(z) = \sum_{n=0}^\infty a_{n+1} z^n$. Cette application translate les coefficients d'une série analytique « vers la gauche ».

On remarque que pour toute fonction analytique $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$,

$$f(z) = f(0) + zSf(z)$$

et

$$S^n f(0) = a_n.$$

On suppose dans un premier temps que f est polynomiale. Il est évident dans ce cas que f et donc $f \circ \varphi$ sont bornés sur $\mathbb{D}$, ce dont on déduit que $f \circ \varphi \in H^2(\mathbb{D})$. On a

$$C_\varphi f = f(0) + M_\varphi C_\varphi(Sf)$$

où M_φ est l'opérateur de multiplication par φ. Puisque $\varphi(0) = 0$, le coefficient constant de $M_\varphi C_\varphi(Sf)$ est nul et la quantité $M_\varphi C_\varphi(Sf)$ est donc orthogonale aux constantes. Ainsi,

$$\|C_\varphi f\|^2 = |f(0)|^2 + \|M_\varphi C_\varphi(Sf)\|^2 \leqslant |f(0)|^2 + \|C_\varphi(Sf)\|^2.$$

On en déduit, en appliquant cette inégalité aux fonctions $S^k f$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, que

$$\|C_\varphi S^k f\|^2 \leqslant |S^k f(0)|^2 + \|C_\varphi(S^{k+1} f)\|^2.$$

On obtient

$$\|C_\varphi f\|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{\deg f} |S^k f(0)|^2 + 0 = \sum_{k=0}^{\deg f} |a_n|^2 = \|f\|^2.$$

Ceci conclut la proposition dans le cas des fonctions polynomiales.

On achève le raisonnement par un résultat de densité : soit $f \in H^2(\mathbb{D})$, on note f_n le polynôme de Taylor d'ordre n associée à f. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur tout compact, et ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f\circ\varphi(re^{it})|^2\,dt &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_n\circ\varphi(re^{it})|^2\,dt \\ &\leqslant \limsup_{n\to\infty} \|C_\varphi f_n\|^2 \\ &\leqslant \limsup_{n\to\infty} \|f_n\|^2 \leqslant \|f\|^2.\end{aligned}$$

Ceci étant vérifié pour tout $0 \leqslant r < 1$, on a montré le résultat voulu. □

La proposition suivante nous permet de montrer qu'un opérateur de composition sur l'espace de Hardy est bien défini et borné.

Proposition 1.7. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique. L'opérateur C_φ est borné sur $H^2(\mathbb{D})$ et on a*

$$\|C_\varphi\| \leqslant \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}.$$

Démonstration. On commence par montrer le résultat dans le cas où f est polynomiale et φ est un automorphisme. Soit $\alpha = \varphi(0) \in \mathbb{D}$, on a

$$\varphi(z) = \frac{\alpha - z}{1-\overline{\alpha}z} \quad \text{et } \varphi^{-1} = \varphi.$$

Puisque f est polynomiale, f est bornée sur $\overline{\mathbb{D}}$ et donc $f\circ\varphi$ l'est aussi. On calcule alors

$$\begin{aligned}\|f\circ\varphi\|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f\circ\varphi(e^{it})|^2\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2|\varphi'(e^{it})|\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2\frac{1-|\alpha|^2}{|1-\overline{\alpha}e^{it}|^2}\,dt \\ &\leqslant \left(\frac{1-|\alpha|^2}{(1-|\alpha|)^2}\right)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2\,dt \\ &= \left(\frac{1+|\alpha|}{1-|\alpha|}\right)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2\,dt.\end{aligned}$$

Ceci montre le résultat dans le cas d'un automorphisme quand f est polynomiale. On peut déduire le résultat pour $f \in H^2(\mathbb{D})$ quelconque à l'aide d'un argument de densité semblable à celui de la proposition précédente [1].

1. La majoration précédente est, en réalité, optimale dans le cas des automorphismes. Ce fait sera démontré plus tard, en guise d'application de la théorie des semigroupes au calcul de normes d'opérateurs de composition.

Il reste à montrer le résultat dans le cas où φ n'est pas un automorphisme. On note $\alpha = \varphi(0)$ et on considère l'automorphisme $\psi(z) = \frac{\alpha - z}{1-\overline{\alpha}z}$. On a alors $C_\varphi = C_{\psi\circ\varphi}C_\psi$ et $\psi \circ \varphi(0) = 0$, d'où

$$\|C_\varphi\| \leqslant \|C_{\psi\circ\varphi}\|\|C_\psi\| \leqslant \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}.$$

□

Hélas, bien que ces opérateurs aient été beaucoup étudiés au cours du dernier siècle, déterminer leurs normes demeure un problème ouvert. On ne sait pas, en toute généralité, calculer la norme d'un opérateur de composition sur un espace de Hardy pondéré, y compris dans le cas de l'espace de Hardy du disque $H^2(\mathbb{D})$. Dans l'article [27], Gallardo et Partington parviennent, dans divers espaces de Hardy pondérés, à calculer la normes des opérateurs de composition par des automorphismes à l'aide de méthodes que nous présenterons et qui sont liées aux semigroupes. C'est dans cette optique, motivés par ces résultats, que nous nous sommes intéressés aux semigroupes d'opérateurs de composition sur les espaces de Hardy.

1.1.3 Semigroupes et générateurs infinitésimaux.

Dans toute cette sous-section, X désignera un espace de Banach. Dans notre cas, l'espace X sera presque toujours un espace de Hardy pondéré et donc un espace de Hilbert.

Définition 1.8. Un *C_0-semigroupe* est une application $T : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(X)$ (où $\mathcal{L}(X)$ est l'ensemble des applications linéaires et continues sur l'espace X) telle que

$$\begin{cases} & T(0) = \mathrm{Id}\ ; \\ \forall s,t \geqslant 0, & T(s+t) = T(s)\circ T(t)\ ; \\ \forall x \in X, & t \mapsto T(t)x \text{ est continue.} \end{cases}$$

Usuellement, une application qui vérifie toutes les propriétés précédentes à l'exception de l'hypothèse de continuité est appelé *semigroupe* (sans le préfixe « C_0 ») ou encore *semigroupe à un paramètre*. Dans la mesure où, dans cette thèse, les semigroupes considérés seront tous des C_0-semigroupes, nous ferons l'abus de langage consistant à omettre ce préfixe.

On peut noter que, si un tel opérateur est défini sur $\mathbb{R}$ et sous l'hypothèse plus forte $\forall s,t \in \mathbb{R},\ T(s+t) = T(s)\circ T(t)$, l'application T transporte la structure de groupe de $(\mathbb{R},+)$ sur la famille $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$. Dans ce cas, nous parlerons de (C_0-)*groupe*.

Exemples.

1. Translation : on se donne un vecteur $v \in X$. On considère, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, les applications $T(t) : x \mapsto x + tv$. L'application T est un semigroupe.
2. Homothétie : on se donne un scalaire $c \in \mathbb{C}$. On considère, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, les applications $T(t) : x \mapsto e^{ct}x$. L'application T est un semigroupe.
3. Composition par translation : sur l'espace $X = \mathcal{C}_{ub}(\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ bornées et uniformément continues, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On considère, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, les applications $T(t) : f \mapsto f(t+\cdot)$. L'application T est un semigroupe.
4. Composition par des automorphismes : sur l'espace de Hardy $X = H^2(\mathbb{D})$. On considère, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, les applications $T(t) : f \mapsto f \circ \varphi_t$, où pour tout $z \in \mathbb{D}$, $\varphi_t(z) = \frac{z+\tanh t}{1+z\tanh t}$. L'application T est un semigroupe.

En particulier, nous avons ici quatre exemples de groupe.

Proposition 1.9. *Soit T un semigroupe. Il existe deux constantes $M \geqslant 1$ et $w \in \mathbb{R}_+$ telles que*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \ \|T(t)\| \leqslant Me^{wt}.$$

Démonstration. La fonction T étant continue sur le compact $[0;1]$, elle est bornée sur cet intervalle. Posons

$$M = \sup_{t\in[0;1]} \|T(t)\| \in \mathbb{R}.$$

Cette constante est supérieure à 1 parce que $T(0) = \mathrm{Id}$. Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on note $\eta = t - \lfloor t \rfloor$ où $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière de t. On a alors

$$\|T(t)\| = \|T(1)^{\lfloor t\rfloor}T(\eta)\| \leqslant M\|T(1)\|^{\lfloor t\rfloor} \leqslant M(\max(1, \|T(1)\|))^t = Me^{wt}$$

où $w = \log(\max(1, \|T(1)\|))$. □

En particulier, dans le cas où la meilleure constante M possible est $M = 1$, le semigroupe est dit *quasi-contractif.* Ce cas jouera un rôle important dans l'espace $H^2(\mathbb{D})$ car nous verrons à la proposition 2.7 que les semigroupes d'opérateurs de composition sont toujours quasi-contractifs. Si, de plus, $w = 0$, on dit que T est un semigroupe de *contraction.*

Définition 1.10. Soit $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}]$. On note Σ_θ le secteur angulaire ouvert

$$\Sigma_\theta = \{re^{i\alpha} \in \mathbb{C}, \ r > 0, \ |\alpha| < \theta\}.$$

On dit que le semigroupe T est *holomorphe* (ou *analytique*) d'angle θ, s'il existe une fonction holomorphe $\widetilde{T} : \Sigma_\theta \to \mathcal{L}(X)$ telle que

$$\begin{cases} \widetilde{T}_{|\mathbb{R}_+} = T, \\ \sup\limits_{\xi\in\Sigma_\theta\cap\mathbb{D}} \|T(\xi)\| < \infty. \end{cases}$$

On remarque que cette définition implique que $\forall s, t \in \Sigma_\theta$,

$$\widetilde{T}(s + t) = \widetilde{T}(s) \circ \widetilde{T}(t).$$

En effet, pour $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $\xi \mapsto \widetilde{T}(\xi)\circ\widetilde{T}(t)-\widetilde{T}(\xi+t)$ de Σ_θ dans $\mathcal{L}(X)$ est holomorphe et nulle sur la demi-droite $\mathbb{R}_+$. Elle est donc nulle sur Σ_θ par le principe des zéros isolés. On peut alors répéter cet argument pour $\xi_0 \in \Sigma_\theta$: la fonction $\xi \mapsto \widetilde{T}(\xi) \circ \widetilde{T}(\xi_0) - \widetilde{T}(\xi + \xi_0)$ est holomorphe et nulle sur la demi-droite $\mathbb{R}_+$. Elle est donc nulle sur Σ_θ par principe des zéros isolés.

Pour connaître le comportement d'un semigroupe, il suffit souvent de l'étudier en 0. Par exemple, pour montrer que les fonctions $t \mapsto T(t)x$ sont continues, il suffit de montrer la continuité en 0 puis de composer par $T(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. L'objet suivant généralise cette remarque. Le générateur d'un semigroupe représente la nature d'un semigroupe en 0. Toutefois, un tel opérateur n'est pas a priori toujours bien défini, aussi on lui associera un domaine : son ensemble de définition.

Définition 1.11. Soit T un semigroupe (holomorphe ou non). Le *générateur*[2] de T est $(D(A), A)$ où

$$D(A) = \left\{ x \in X, \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}(T(t)x - x) \text{ existe} \right\}$$

est le domaine du générateur et

$$\forall x \in D(A),\ A : x \mapsto \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}(T(t)x - x).$$

Exemples.

1. Translation : sur un espace X de Banach, on se donne un vecteur $v \in X$. On considère, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'application $T(t) : x \mapsto x + tv$. Le générateur du semigroupe T est défini sur $D(A) = X$ et est l'opérateur constant $A \equiv v$.
2. Homothétie : sur un espace X de Banach, on se donne un scalaire $c \in \mathbb{C}$. On considère, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'application $T(t) : x \mapsto e^{ct}x$. Le générateur du semigroupe T est défini sur $D(A) = X$ et est donné par l'opérateur de multiplication $A = c\,\mathrm{I}$.
3. Composition par translation : sur l'espace $X = \mathcal{C}_{ub}(\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ bornées et uniformément continues, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On considère, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'application $T(t) : f \mapsto f(t + \cdot)$. Le générateur du semigroupe T est défini sur le sous espace de X des fonctions de X qui sont dérivables et est donné par l'opérateur de dérivation $Af = f'$.
4. Nous étudierons en détails le cas des opérateurs de composition sur l'espace de Hardy.

Le générateur d'un semigroupe vérifie de nombreuses propriétés simples.

– Cet opérateur est linéaire.
– Pour tous $x \in D(A), t \in \mathbb{R}_+$, on a $T(t)x \in D(A)$ et $\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x$.
– De plus, le générateur caractérise entièrement le semigroupe. En effet, si S et T sont deux semigroupes de même générateur, on considère les fonctions $f_t : s \mapsto T(t-s)S(s)x$ où $x \in D(A)$. Ces fonctions sont de dérivées nulles, donc sont constantes. On en déduit que $S(t)x = f_t(t) = f_t(0) = T(t)x$.
– L'origine de cet objet vient du fait que, pour tout $x \in D(A)$, la fonction $t \mapsto T(t)x$ est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) \\ u(0) = x. \end{cases}$$

La définition seule peut sembler bien pauvre, surtout en ce qui concerne le domaine du générateur qui pourrait aller de l'ensemble vide à l'espace entier. Il n'en est rien. Le théorème suivant affirme, en particulier, que le domaine d'un générateur est toujours dense dans l'espace X.

Proposition 1.12. *Le générateur d'un semigroupe est fermé et de domaine dense.*

Démonstration.

2. ou parfois *générateur infinitésimal*

1. Soit $x \in X$. On pose
$$v_x(t) = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)xds.$$
On va montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $v_x(t)$ appartient à $D(A)$ et que $v_x(t)$ tend vers x lorsque t tend vers 0. On a :
$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}(T(h)v_x(t) - v_x(t)) &= \frac{1}{h}\left(\int_0^t T(s+h)x\ ds - \int_0^t T(s)x\ ds\right)\\
&= \frac{1}{h}\left(\int_t^{t+h} T(s)x\ ds - \int_0^h T(s)x\ ds\right)\\
&\underset{h\to 0}{\longrightarrow} T(t)x - x.
\end{aligned}$$
Ceci montre que $v_x(t) \in D(A)$ pour tout $t > 0$. En outre $v_x(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} T(0)x = x$.

2. Afin de montrer que l'opérateur $(A, D(A))$ est fermé, on considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(A)^{\mathbb{N}}$ et deux éléments $x, y \in X$ tels que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ et $Ax_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$. On cherche à montrer que $x \in D(A)$ et $Ax = y$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $t, h \in \mathbb{R}_+^*$, on note $u^n : t \mapsto AT(t)x_n$ et $u_h^n : t \mapsto \frac{1}{h}(T(t+h)x_n - T(t)x_n)$. Par un calcul analogue au précédent, on a
$$\int_0^t u_h^n(s)\ ds \underset{h\to 0}{\longrightarrow} T(t)x_n - x_n.$$
Par ailleurs,
$$\|(u_h^n - u^n)(t)\| \leqslant \|T(t)\|\|\frac{1}{h}(T(h)x_n - x_n) - Ax_n\|.$$
Ainsi, u_h^n converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}_+$ vers u^n. On en déduit que
$$\int_0^t u_h^n(s)\ ds \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \int_0^t u^n(s)\ ds.$$
On a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t AT(s)x_n\ ds = \int_0^t T(s)Ax_n\ ds.$$
En multipliant cette égalité par $\frac{1}{t}$ et en faisant tendre n vers ∞, on en déduit que
$$\frac{1}{t}(T(t)x - x) = \frac{1}{t}\left(\int_0^t T(s)y\ ds\right).$$
Ainsi, $t \mapsto T(t)x$ est dérivable en 0 de dérivée $T(0)y = y$, ce qui est le résultat souhaité.

$\square$

1.2 Semiflots de fonctions analytiques

Considérer un semigroupe d'opérateurs de composition sur un espace de Hardy pondéré revient à se donner une famille de fonctions analytiques $\Phi = (\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ du disque unité dans lui-même. On notera $C_\Phi = (C_{\varphi_t})_{t\in\mathbb{R}_+}$ le semigroupe d'opérateurs de composition ainsi construit. Si C_Φ est un semigroupe, on observe que Φ doit vérifier toutes les propriétés des semigroupes, ou presque. En effet, les fonctions φ_t ne sont pas des applications linéaires continues, mais des fonctions analytiques de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$. Ainsi, on ne dira pas que Φ est un semigroupe, mais on parlera de semiflots.

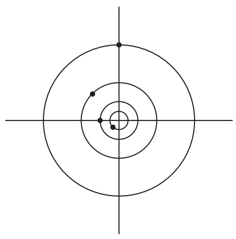
1.2.1 Semiflots de fonctions analytiques

Définition 1.13. La famille $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ de fonctions analytiques de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ est un *semiflot* si

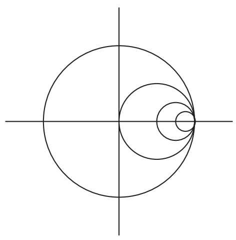
$$\begin{cases} \forall z \in \mathbb{D}, & \varphi_0(z) = z \ ; \\ \forall s,t \geqslant 0, & \varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t \ ; \\ \forall z \in \mathbb{D}, & t \mapsto \varphi_t(z) \text{ est continue.} \end{cases}$$

Exemple.

1. Soit $c \in \mathbb{C}$, avec $\mathrm{Re}(c) \geqslant 0$. Les fonctions $z \mapsto e^{-ct}z$ forment un semigroupe de fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$. Chacune de ces fonctions contracte le disque en le faisant tourner autour de l'origine.



2. Les fonctions $z \mapsto e^{-t}z + 1 - e^{-t}$ forment un semigroupe de fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$. Ces fonctions contractent le disque puis le translatent de sorte que le point 1 soit point fixe.



3. Les fonctions $z \mapsto \frac{(1+e^t)z-1+e^t}{(-1+e^{-t})z+1+e^{-t}}$ forment un semigroupe de fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$. Ce semigroupe est constitué d'automorphismes du disque.

Dans cette définition, nous aurions pu demander que φ soit continue par rapport aux deux variables t et z, ce qui semble plus fort. Le théorème de Montel (voir par exemple [9]) assure que cette condition est équivalente à la continuité des $t \mapsto \varphi_t(z)$. Le choix de cette nouvelle définition, celle qui est plus forte, se justifie par un aspect pratique inhérent aux démonstrations à venir. Aussi, nous allons maintenant la montrer.

Proposition 1.14. *Soit $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un semiflot. La fonction $\varphi : (t,z) \mapsto \varphi_t(z)$ est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{D}$.*

Démonstration. Au vu des propriétés de semiflot de la famille $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, il suffit de montrer le résultat pour t proche de 0, c'est-à-dire $\varphi_t(z) \underset{\substack{t\to 0\\ z\to z_0}}{\longrightarrow} \varphi_0(z_0) = z_0$.

Soient $\varepsilon > 0$ et $z_0 \in \mathbb{D}$. On va montrer que

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+, \forall z \in K_\varepsilon = \overline{D}\left(z_0, \varepsilon\frac{1-|z_0|}{2}\right), \forall t \in [0;\alpha[, \|\varphi_t(z) - z_0\| < \varepsilon.$$

On suppose pour cela que ce n'est pas le cas. On en déduit l'existence d'une suite $(\varphi_{t_n})_{n\in\mathbb{N}}$ qui n'est pas uniformément convergente sur K_ε et donc pas uniformément de Cauchy sur K_ε. Ainsi, il existe $\eta > 0$ et deux sous-suites $(\varphi_{t_{n_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ et $(\varphi_{t_{m_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall j \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{K_\varepsilon} \|\varphi_{t_{n_j}} - \varphi_{t_{m_j}}\| \geqslant \eta.$$

Le théorème de Montel s'applique sur ces deux suites qui convergent donc uniformément sur K_ε respectivement vers des fonctions φ et ψ. On a alors que

$$\sup_{K_\varepsilon} \|\varphi - \psi\| \geqslant \eta,$$

ce qui contredit la convergence ponctuelle de la suite $(\varphi_{t_n})_{n\in\mathbb{N}}$ issue du semiflot $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. □

De même qu'avec les semigroupes, nous serons amenés à considérer les générateurs de nos semiflots. Là encore, il n'est pas évident qu'un tel objet soit défini sur un domaine raisonnable. C'est bien le cas. Le théorème suivant, dû à Berkson et Porta [14], énonce que le générateur d'un semiflot de fonctions analytiques de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ est une fonction définie sur le disque unité ouvert tout entier.

Théorème 1.15 (Berkson-Porta)**.** *Soit Φ un semiflot de fonctions analytiques de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$. Il existe une application $G : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analytique telle que $\forall t \geqslant 0$, $\forall z \in \mathbb{D}$,*

$$\frac{\partial \varphi(t,z)}{\partial t} = G(\varphi(t,z)).$$

Démonstration. Au vu des propriétés de semiflot de Φ, on se contente de montrer le résultat pour $t = 0$. L'objectif est de montrer que, pour tout z dans un disque compact $\overline{D}(0,r)$, le quotient $\frac{1}{t}(\varphi(t,z) - z)$ admet une limite finie $G(z) \in \mathbb{C}$ lorsque t tend vers 0^+. Soit $0 < r < 1$.

– Puisque pour tout $z \in \mathbb{D}$, $\varphi(t,z) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} z$, il existe $\alpha \in [0;1]$ tel que, pour tout point z du cercle de centre 0 et de rayon $\frac{1+r}{2}$ et pour tout $t \in [0;\alpha]$,

$$\frac{2|\varphi(t,z) - z|}{1-r} \leqslant \frac{1}{10}.$$

On en déduit par la formule intégrale de Cauchy que $\forall t \in [0;\alpha]$, $\forall z \in \overline{D}(0,r)$,

$$\left|\frac{\partial(\varphi(t,z) - z)}{\partial z}\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}(0,\frac{1+r}{2})} \frac{|\varphi(t,\xi) - \xi|}{|\xi - z|} d\xi\right| \leqslant \frac{1}{10}.$$

Puis, $\forall t \in [0;\alpha],\ \forall z \in \overline{D}(0,r)$,

$$|\varphi(2t,z) - 2\varphi(t,z) + z| = \left| \int_{\gamma_{z,t}} \frac{\partial(\varphi(t,z) - z)}{\partial z} dz \right| \leqslant \frac{1}{10} |\varphi(t,z) - z|,$$

où $\gamma_{z,t}(\lambda) = \lambda\varphi(t,z) + (1-\lambda)z$, $\lambda \in [0;1]$. On en déduit que $\forall t \in [0;\alpha],\ \forall z \in \overline{D}(0,r)$,

$$|\varphi(t,z) - z| \leqslant \frac{10}{19} |\varphi(2t,z) - z| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} |\varphi(2t,z) - z|.$$

– On montre maintenant qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall t \in [0;1],\ \forall z \in \overline{D}(0,r)$,

$$|\varphi(t,z) - z| \leqslant M t^{\frac{2}{3}}.$$

· Posant n_0 le plus petit entier tel que $\frac{1}{2^{n_0}} \leqslant \alpha$, il vient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \varphi\left(\frac{1}{2^{n_0+n}}, z\right) - z \right| \leqslant \left(\frac{1}{2^{n_0+n}}\right)^{\frac{2}{3}} \times \underbrace{(2^{n_0-1})^{\frac{2}{3}} \sup_{z \in \overline{D}(0,r)} \left| \varphi\left(\frac{1}{2^{n_0-1}}, z\right) - z \right|}_{:= M_1}.$$

· Soit $t \in \left]\frac{1}{2^{n_0}}; 1\right]$. Alors

$$|\varphi(t,z) - z| \leqslant t^{\frac{2}{3}} \times \underbrace{(2^{n_0})^{\frac{2}{3}} \sup_{\substack{z \in \overline{D}(0,r) \\ u \in \left[\frac{1}{2^{n_0}};1\right]}} |\varphi(u,z) - z|}_{:= M_2}.$$

· Soit $t \in \left]\frac{1}{2^{n_0+n+1}}; \frac{1}{2^{n_0+n}}\right]$. Alors

$$|\varphi(t,z) - z| \leqslant t^{\frac{2}{3}} \times \underbrace{(2^{n_0+1})^{\frac{2}{3}} \sup_{\substack{z \in \overline{D}(0,r) \\ u \in \left[\frac{1}{2^{n_0+1}};\frac{1}{2^{n_0}}\right]}} |\varphi(u,z) - z|}_{:= M_3}.$$

· Le résultat est vrai pour $t = 0$.

– On en déduit que pour tout $t \in [0;\alpha]$ et tout $z \in \overline{D}(0,r)$,

$$|\varphi(2t,z) - 2\varphi(t,z) + z| \leqslant \frac{1}{10} M t^{\frac{2}{3}}$$

et donc que

$$\left| \frac{\varphi(2t,z) - z}{2t} - \frac{\varphi(t,z) - z}{t} \right| \leqslant \frac{M}{20} t^{\frac{2}{3}}.$$

On a ainsi montré que la suite $(2^n(\varphi(\frac{1}{2^n}, z) - z))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$ qui est complet, ce qui montre l'existence de la fonction analytique G par le critère de Cauchy uniforme. On montre de même que la suite $(2^n(\varphi(s+\frac{1}{2^n}, z) - \varphi(s,z)))_{n\in\mathbb{N}}$ tend localement uniformément vers $G(\varphi(s,z))$.

□

Nous avons ainsi montré qu'un semiflot était toujours donné comme solution d'un problème de Cauchy

$$\frac{\partial u(t,z)}{\partial t} = G(u(t,z)), \quad u(0,z) = z,$$

où G est une fonction analytique sur le disque (qui est convexe). Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous offre alors le corollaire suivant :

Corollaire 1.16. *Soit $(\varphi(t,\cdot))_{t\in\mathbb{R}_+}$ un semiflot de fonctions analytiques de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$. Les fonctions $\varphi(t,\cdot)$ sont injectives.*

Démonstration. On suppose par l'absurde qu'il existe $t_1 \in \mathbb{R}_+$ tel que la fonction φ_{t_1} n'est pas injective, c'est-à-dire, qu'il existe z_1 et $z_2 \in \mathbb{D}$ tels que $\varphi_{t_1}(z_1) = \varphi_{t_1}(z_2)$. On note

$$K = \{t \in [0,t_1], \varphi_t(z_1) = \varphi_t(z_2)\}.$$

L'ensemble K est un compact non vide de $\mathbb{R}_+$, on note t_{min} son minimum.

Comme $\varphi_t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} I$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$, on a que $\varphi'_t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \mathbb{1}_{\mathbb{D}}$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$. On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction φ_t est localement injective. En particulier, il existe $r > 0$ et $t_0 > 0$ tels que pour tout $t \in [0;t_0]$, la fonction $\varphi_{t|D(\varphi_{t_{min}}(z_1),r)}$ est injective.

On se donne maintenant un réel $\varepsilon \in]0;\min(t_{min},t_0)[$ tel que $\varphi_{t_{min}-\varepsilon}(z_1)$ et $\varphi_{t_{min}-\varepsilon}(z_2)$ appartiennent tous deux à $D(\varphi_{t_{min}}(z_1),r)$. Or ces deux éléments sont distincts par définition de t_{min} mais on même image par φ_ε qui n'est donc pas injective sur $D(\varphi_{t_{min}}(z_1),r)$. Nous avons obtenue la contradiction voulue. □

Ce dernier corollaire s'avèrera capital pour la suite. En effet, nous avons déjà vu qu'un opérateur de composition n'est pas en général défini sur un espace de Hardy pondéré. Cependant, un opérateur de composition de symbole injectif est défini sur l'espace de Dirichlet $\mathcal{D}$ (voir proposition 2.13). Ainsi, c'est sans scrupule que nous pourrons étudier des semigroupes d'opérateurs de composition sur cet espace particulier.

1.2.2 Application aux calculs de normes

Afin de calculer des normes d'opérateurs de composition (vus comme éléments d'un semigroupe), nous chercherons essentiellement à encadrer la norme d'un semigroupe T par

$$e^{\lambda t} \leqslant \|T(t)\| \leqslant e^{\Lambda t},$$

où λ et Λ sont deux constantes liées aux propriétés spectrales du générateur de T. L'égalité de ces deux constantes serait la cerise sur le gâteau.

Minoration

Soit λ une valeur propre du générateur A du semigroupe T et soit $x \in D(A)$ un vecteur propre associé. On a $Ax = \lambda x$ et donc, en particulier pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\lambda T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x = \frac{\partial T(t)x}{\partial t}.$$

Ainsi, la fonction $t \mapsto T(t)x$ est solution du problème de Cauchy

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \lambda y, \quad y(0) = T(0)x = x,$$

qui admet $t \mapsto e^{\lambda t}x$ comme unique solution. Ainsi, $\|T(t)x\| = e^{\mathrm{Re}(\lambda)t}\|x\|$.

En notant $\sigma_p(A)$ le spectre ponctuel de l'opérateur A, on pose $\lambda = \sup \mathrm{Re}\,(\sigma_p(A))$. Nous pouvons déduire de ce qui précède que

$$e^{\lambda t} \leqslant \|T(t)\|.$$

Dans la pratique, pour déterminer une valeur propre du générateur de nos semigroupes, il faut, comme ci-dessus, résoudre un problème de Cauchy. Il est en général assez aisé d'avoir une expression explicite d'une solution. Malheureusement, il l'est beaucoup moins de prouver que cette fonction appartient à l'espace de Hardy considéré. En toute généralité, déterminer le spectre ponctuel du générateur d'un semigroupe d'opérateur de composition revient exactement à se demander, parmi une famille de fonctions, lesquelles sont dans le bon espace et lesquelles n'y sont pas ?

Majoration

On définit l'*image numérique* $W(A)$ d'un opérateur A par

$$W(A) = \{\langle Ax, x\rangle, \|x\| = 1\}.$$

C'est à l'aide de cette quantité que nous exprimerons une bonne estimation de la norme d'un semigroupe engendré par A. Cette quantité apparait comme naturelle à partir du théorème suivant.

Théorème 1.17 (Lumer-Phillips 1961)**.** *Soit $(A, D(A))$ un opérateur de domaine dense sur un espace de Banach X. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *L'opérateur A est le générateur d'un semigroupe de contraction.*
2. *Il existe $\lambda > 0$ tel que $(\lambda \,\mathrm{Id} - A)D(A) = X$ et pour tout $x \in D(A)$,*
$$\mathrm{Re}\langle Ax, x\rangle \leqslant 0. \tag{1.1}$$
3. *Pour tout $\lambda > 0$, on a $(\lambda \,\mathrm{Id} - A)D(A) = X$ et pour tout $x \in D(A)$,*
$$\mathrm{Re}\langle Ax, x\rangle \leqslant 0.$$

Un opérateur dont l'image numérique est incluse dans le demi-plan gauche, c'est-à-dire qui vérifie l'inégalité (1.1) est dit *dissipatif.* Soit T un semigroupe de générateur A. Notant

$$\Lambda = \sup \operatorname{Re} W(A),$$

le semigroupe $t \mapsto e^{-\Lambda t}T(t)$ admet $A - \Lambda \operatorname{Id}$ comme générateur. On en déduit à l'aide du théorème de Lumer-Phillips que le semigroupe $t \mapsto e^{-\Lambda t}T(t)$ est un semigroupe de contraction, c'est-à-dire que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\|T(t)\| \leqslant e^{\Lambda t}.$$

Exemples

Exemple. On considère le semigroupe T d'opérateurs de composition par le semiflot donné sur $\mathbb{D}$ par

$$\varphi_t(z) = e^{-ct}$$

avec $\operatorname{Re}(c) \geqslant 0$. Le générateur de ce semiflot est la fonction analytique $G : z \mapsto -cz$ et le générateur du semigroupe T est donné par $A : f \mapsto G \times f'$. Commençons par calculer le coefficient Λ qui borne l'image numérique de A par la droite. Soit $f(z) = \sum a_n z^n \in H^2(\beta)$ de norme 1.

$$\begin{aligned}
\langle Af, f\rangle &= \left\langle -zc\sum_{n=0}^{\infty} a_n n z^{n-1}, \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right\rangle \\
&= -c\left\langle \sum_{n=0}^{\infty} a_n n z^{n}, \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right\rangle \\
&= -c\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|^2\beta_n^2, \\
\text{donc } \operatorname{Re}\langle Af, f\rangle &= -\operatorname{Re}(c)\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|^2\beta_n^2 \leqslant 0.
\end{aligned}$$

On en déduit directement que $\|T(t)\| \leqslant e^0 = 1$ et, l'inégalité inverse ayant toujours lieu, que

$$\|T(t)\| = 1.$$

Exemple. On considère le semigroupe T d'opérateurs de composition par le semiflot donné sur $\mathbb{D}$ par

$$\varphi_t(z) = \frac{e^{-t}z}{(e^{-t}-1)z+1}.$$

Le générateur de ce semiflot est la fonction analytique $G : z \mapsto -z(1-z)$ et le générateur du semigroupe T est donné par $A : f \mapsto G \times f'$. Commençons par calculer le coefficient Λ qui borne l'image numérique de A par la droite. On considère une suite β décroissante. Soit $f(z) = \sum a_n z^n \in H^2(\beta)$ de norme 1.

$$\begin{aligned}
\langle Af, f \rangle &= \left\langle -z(1-z)\sum_{n=0}^{\infty} a_n n z^{n-1}, \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right\rangle \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|^2\beta_n^2 + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n \overline{a_{n+1}}\beta_{n+1}^2 \\
\mathrm{Re}\langle Af, f \rangle &\leqslant -\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|^2\beta_n^2 + \sum_{n=0}^{\infty} n\beta_{n+1}^2 \left(\frac{|a_n|^2 + |a_{n+1}|^2}{2} \right) \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|^2\beta_n^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2}|a_n|^2\beta_{n+1}^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2}|a_{n+1}|^2\beta_{n+1}^2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}|a_{n+1}|^2\beta_{n+1}^2 \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}|a_{n+1}|^2\beta_{n+1}^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2}|a_n|^2(\beta_{n+1}^2 - \beta_n^2) \leqslant 0.
\end{aligned}$$

On en déduit directement que $\|T(t)\| \leqslant e^0 = 1$ et, l'inégalité inverse ayant toujours lieu, que

$$\|T(t)\| = 1.$$

Remarque. Dans l'espace de Hardy, on peut noter, pour les deux exemples précédents, de même que pour les semigroupes d'opérateurs de composition par les semiflots donnés par les expressions suivantes

$$\varphi_t(z) = 1 - (1-z)^{e^{-t}},$$

$$\varphi_t(z) = \frac{e^{-t}z}{((e^{-nt}-1)z^n + 1)^{\frac{1}{n}}}$$

et

$$\varphi_t(z) = \frac{(1+z)^{e^{-t}} - (1-z)^{e^{-t}}}{(1+z)^{e^{-t}} + (1-z)^{e^{-t}}},$$

que l'approche précédente est inutile dans le sens où le calcul de leur norme était déjà triviale. En effet, pour chacun de ces semiflots, on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_t(0) = 0$. On déduit, grâce à la proposition 1.6, que la norme de ces semigroupes vaut toujours 1.

Exemple. On considère le semigroupe T d'opérateurs de composition par le semiflot donné sur $\mathbb{D}$ par

$$\varphi_t(z) = e^{-t}z + 1 - e^{-t}.$$

Le générateur de ce semiflot est la fonction analytique $G : z \mapsto 1 - z$ et le générateur du semigroupe T est $A : f \mapsto G \times f'$. Commençons par calculer le coefficient Λ qui borne l'image numérique de A par la droite. On considère une suite β croissante. Soit $f(z) = \sum a_n z^n \in$

$H^2(\beta)$ de norme 1. On obtient :

$$\begin{array}{rcl} \langle Af, f\rangle & = & \left\langle (1-z)\sum_{n=0}^{\infty} a_n n z^{n-1}, \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right\rangle \\ & = & -\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|^2\beta_n^2 + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}\overline{a_n}\beta_n^2, \\ \text{donc } \operatorname{Re}\langle Af, f\rangle & \leqslant & -\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|^2\beta_n^2 + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\beta_n^2\left(\frac{|a_n|^2+|a_{n+1}|^2}{2}\right) \\ & = & +\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}|a_n|^2\beta_n^2 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2}|a_n|^2(\beta_{n-1}^2-\beta_n^2) \leqslant \frac{1}{2}. \end{array}$$

On en déduit directement que

$$\|T(t)\| \leqslant e^{\frac{t}{2}}.$$

Pour obtenir la borne inférieure, on cherche à savoir si $\frac{1}{2}$ est valeur propre de A, c'est-à-dire si une fonction f solution de l'équation $\frac{1}{2}f = G \times f'$ est dans l'espace $H^2(\beta)$. On observe que la fonction

$$f : z \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-z}}$$

est solution de cette équation. L'appartenance de f à $H^2(\beta)$ dépend de toute évidence de la suite β. Par exemple, si $\beta_n \equiv 1$, c'est-à-dire dans l'espace de Hardy, l'inclusion est vérifiée. On peut ainsi dire que sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$,

$$\|T(t)\| = e^{\frac{t}{2}}.$$

Exemple. Ce dernier exemple est celui introduit dans l'article [27]. On considère le semigroupe T d'opérateurs de composition par le semiflot donné sur $\mathbb{D}$ par

$$\varphi_t(z) = \frac{z + \tanh t}{1 + z\tanh t}.$$

Le générateur de ce semiflot est la fonction analytique $G : z \mapsto 1 - z^2$ et le générateur du semigroupe T est donc $A : f \mapsto G \times f'$. Commençons par calculer le coefficient Λ qui borne l'image numérique de A par la droite. On traite ce calcul dans le cas où la suite β des poids est donnée par $\beta_n = \frac{1}{(1+n)^\nu}$ avec $0 \leqslant \nu \leqslant 2$. Soit $f(z) = \sum a_n z^n \in H^2(\beta)$ de norme 1.

$$\begin{aligned}
\langle Af, f\rangle &= \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}(1-z^2), \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m \right\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)\beta_n^2 \overline{a_n} a_{n+1} - n\beta_{n+1}^2 a_n \overline{a_{n+1}}) \\
\operatorname{Re}\langle Af, f\rangle &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\beta_n^2 - n\beta_{n+1}^2}{2\beta_n\beta_{n+1}} (\beta_n^2 |a_n|^2 + \beta_{n+1}^2 |a_{n+1}|^2) \\
&\leqslant \sup_{n\geqslant 0} \frac{(n+1)\beta_n^2 - n\beta_{n+1}^2}{\beta_n\beta_{n+1}} \times \frac{2\|f\|^2}{2} \\
&= \sup_{n\geqslant 0} (n+1)\frac{(n+2)^\nu}{(n+1)^\nu} - n\frac{(n+1)^\nu}{(n+2)^\nu}.
\end{aligned}$$

On note $u(n,\nu) = (n+1)\frac{(n+2)^\nu}{(n+1)^\nu} - n\frac{(n+1)^\nu}{(n+2)^\nu}$ et on cherche à en calculer le supremum. Pour cela, on observe que pour tout $\nu \geqslant 0$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} u(n,\nu) = 1+2\nu$, et que pour tout n,

$$\frac{\partial^2 u(n,\nu)}{\partial \nu^2} = \left(\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right)^2 u(n,\nu) > 0.$$

Ainsi la fonction $u(n,\cdot)$ est convexe. En outre, $u(\cdot,0) \equiv 1$ et

$$u(n,2) = (n+1)\frac{(n+2)^2}{(n+1)^2} - n\frac{(n+1)^2}{(n+2)^2}$$

définit une suite croissante vu que

$$u(n+1,2) - u(n,2) = \frac{n(n+1)^2 + (n+2)(n+3)^2}{(n+2)^2} + 4\frac{(n+2)^3}{(n+1)(n+3)^2} > 0.$$

Il vient que $u(\cdot,2) \leqslant \lim u(\cdot,2) = 5$. Puis, par inégalité de convexité, on en déduit, pour tout $0 \leqslant \nu \leqslant 2$, que

$$u(\cdot,\nu) \leqslant \frac{2-\nu}{2} u(\cdot,0) + \frac{\nu}{2} u(\cdot,2) \leqslant 1+2\nu.$$

On a ainsi montré que pour tout automorphisme φ de $\mathbb{D}$,

$$\|T(t)\| \leqslant e^{(1+2\nu)t}.$$

Cette majoration semble grossière au vu de la méthode utilisée. Nous allons cependant montrer maintenant qu'elle est suffisante. Pour cela, on observe que e^{2wt} est valeur propre de T dès que le candidat à être un vecteur propre

$$K(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^w$$

appartient à $H^2(\beta)$, où on a noté $w = \frac{1+2\nu}{2}$ afin d'alléger les notations. On a :

$$K(z) = (1+z)^w \left(\frac{1}{1-z}\right)^w.$$

La fonction $z \mapsto (1+z)^w$ appartient à l'espace $H^\infty(\mathbb{D})$ (et donc à $H^2(\beta)$). Puisque les fonctions de $H^\infty(\mathbb{D})$ sont des multiplicateurs pour $H^2(\beta)$, il suffit de montrer que la fonction $z \mapsto \left(\frac{1}{1-z}\right)^w \in H^2(\beta)$. Or

$$z \mapsto \frac{1}{(1-z)^w} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+w)}{\Gamma(n+1)\Gamma(w)} z^n \in H^2(\beta)$$

si et seulement si la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+w)^2}{\Gamma(n+1)^2(n+1)^{2\nu}}$$

est convergente. Mais

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n)n^\alpha} = 1,$$

donc

$$\forall w \in \mathbb{R}, \quad \frac{\Gamma(n+w)^2}{\Gamma(n+1)^2(n+1)^{2\nu}} = \frac{\Gamma(n+w)^2}{n^2\Gamma(n)^2(n+1)^{2\nu}} \sim n^{2w-2-2\nu},$$

d'où par comparaison avec une série de Riemann, il y a convergence de cette série pour $w < \frac{1+2\nu}{2}$. Nous pouvons remarquer que nous n'avons pas montré exactement ce que nous voulions, mais nous pouvons tout de même en déduire que pour tout $w < \frac{1+2\nu}{2}$,

$$\|T(t)\| \geqslant e^{2wt}.$$

En conclusion,

$$\|T(t)\| = e^{(1+2\nu)t}.$$

Nous venons de voir comment calculer la norme d'opérateurs de composition lorsqu'ils peuvent être exprimés comme éléments d'un semigroupe. La question qui se pose naturellement est : peut-on toujours faire cela ? Est-il toujours possible de trouver un semigroupe dont l'un des éléments est une fonction analytique prescrite ? Hélas, la réponse est non. Une première raison à cela est que les fonctions analytiques issues d'un semiflot sont toujours injectives. Les fonctions analytiques qui ne sont pas injectives n'ont donc aucun espoir de s'insérer dans un semiflot et nous n'avons aucun espoir de calculer leurs normes de cette façon. Une deuxième restriction tient à ce que, pour une fonction analytique $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ donnée, trouver un semiflot dans lequel l'insérer revient, en particulier, à calculer ses puissances fractionnaires $\varphi^{\frac{1}{n}}$. Or on ne sait pas déterminer les fonctions analytiques qui admettent des puissances fractionnaires. Il s'agit d'un problème toujours ouvert (voir par exemple [23]). Toutefois, nous avons également pu remarquer à quel point les propriétés des opérateurs de composition issus d'un semigroupe sont liées à celles de leur générateur. C'est pourquoi nous allons désormais nous intéresser à ces derniers : les caractériser sera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 2

Générateurs de semigroupes quasi-contractifs

Nous avons vu dans le chapitre précédent que les propriétés de certains opérateurs de composition – ceux qui pouvaient être vus comme éléments d'un semigroupe – étaient étroitement liées au générateur du semigroupe en question, c'est-à-dire à un unique opérateur. Il paraît alors censé de s'intéresser en détails à ces générateurs, la première des questions étant : qui sont-ils ? Peut-on caractériser les opérateurs qui sont des générateurs de semigroupes d'opérateurs de composition ? Pour cela, on considèrera une fonction analytique G, et on notera A l'opérateur $f \mapsto G \times f'$ sur l'espace de Hardy $H^2(\beta)$. On remarque que l'opérateur A engendre un semigroupe d'opérateurs de composition si et seulement si la fonction G engendre un semiflot de fonctions analytiques du disque. C'est, dans la première section de ce chapitre, ce second point de vue que nous abordons : considérant une fonction G analytique, nous cherchons à déterminer si cette fonction engendre un semiflot ou non, et ce, sans considération pour le semigroupe de composition par ce semiflot, ni pour l'espace dans lequel ce dernier sera défini.

2.1 Semigroupes d'opérateurs de composition

La proposition suivante donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction analytique engendre un semiflot. Cette condition met en scène G et sa dérivée G' sur l'ensemble des points du disque $\mathbb{D}$.

Proposition 2.1. *Une fonction analytique $G : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ engendre un semiflot si et seulement si pour tout $z \in \mathbb{D}$,*

$$2\,\mathrm{Re}(\overline{z}G(z)) + \left(1 - |z|^2\right) \mathrm{Re}(G'(z)) \leqslant 0. \tag{2.1}$$

Démonstration. On suppose que la fonction G est effectivement génératrice. Soit $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ le semiflot associé. Soit $\eta > 0$. Par analyticité, on a pour $\eta > t > 0$ et $z \in \mathbb{D}$ fixé :

$$\varphi_t(z) = z + G(z)t + o(t)$$

et en écrivant $\varphi_t(z) = z + G(z)t + t\varepsilon(t, z)$ et en dérivant selon z, on en déduit que

$$\varphi_t'(z) = 1 + G'(z)t + o(t).$$

Puis, par le théorème A.3 de Schwarz–Pick, on obtient que

$$|\varphi_t'(z)| \leqslant \frac{1-|\varphi_t(z)|^2}{1-|z|^2}$$

et donc que

$$1+\mathrm{Re}(G'(z))t+o(t) \leqslant \frac{1-|z|^2}{1-|z|^2} - \frac{2\,\mathrm{Re}(\overline{z}G(z))}{1-|z|^2}t+o(t).$$

La condition (2.1) apparaît alors lorsqu'on fait tendre t vers 0^+.

On suppose maintenant la condition (2.1). Soit $z_0 \in \mathbb{D}$. On considère le problème de Cauchy

$$\frac{dw}{dt} = G(w), \quad w(0) = z_0.$$

Puisque G est analytique et donc localement Lipschitzienne, il existe une solution locale $w(t) = \varphi_t(z_0)$ à valeurs dans $\mathbb{D}$ par le théorème de Cauchy–Peano. On pose

$$\varrho(z_1, z_2) = \min_{\gamma(0)=z_1;\gamma(1)=z_2} \int_\gamma \frac{2}{1-|z|^2}|dz|.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\varrho(z_0, \varphi_t(z_0)) &\leqslant \int_0^t \frac{2}{1-|\varphi_s(z_0)|^2}\left|\frac{\partial \varphi_s(z_0)}{\partial s}\right| ds \\
&= \int_0^t \frac{2}{1-|\varphi_s(z_0)|^2}\,|G(\varphi_s(z_0))|\, ds.
\end{aligned}$$

On pose $f : t \mapsto \dfrac{2}{1-|\varphi_t(z_0)|^2}\,|G(\varphi_t(z_0))|$, de sorte que $\varrho(z_0, \varphi_t(z_0)) \leqslant \int_0^t f(s)ds$. On a alors,

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \frac{2}{(1-|\varphi_t(z_0)|^2)^2}\left[\frac{\partial |G(\varphi_t(z_0))|}{\partial t}(1-|\varphi_t(z_0)|^2) + 2\,\mathrm{Re}\left(\overline{\varphi_t(z_0)}G(\varphi_t(z_0))\right)|G(\varphi_t(z_0))|\right] \\
&= \frac{2|G(\varphi_t(z_0))|}{(1-|\varphi_t(z_0)|^2)^2}\left[\mathrm{Re}(G'(\varphi_t(z_0)))(1-|\varphi_t(z_0)|^2) + 2\,\mathrm{Re}\left(\overline{\varphi_t(z_0)}G(\varphi_t(z_0))\right)\right] \\
&\leqslant 0 \quad \text{vue la condition (2.1) appliquée en } \varphi_t(z_0).
\end{aligned}$$

On en déduit que f est une fonction décroissante et donc que, pour $0 \leqslant t_1 < t_2 < \eta$,

$$\varrho(\varphi_{t_1}(z_0), \varphi_{t_2}(z_0)) \leqslant \int_{t_1}^{t_2} f(t_1)ds = (t_2-t_1)\frac{2|G(\varphi_{t_1}(z_0))|}{1-|\varphi_{t_1}(z_0)|^2}.$$

De plus, sur $[0, \eta[$, la fonction $t \mapsto \varphi_t(z_0)$ reste à valeurs dans un compact de $\mathbb{D}$, d'où pour $0 \leqslant t_1 < t_2 < \eta$,

$$\varrho(\varphi_{t_1}(z_0), \varphi_{t_2}(z_0)) \leqslant K|t_2 - t_1|,$$

où K est une constante indépendante de t_1, t_2. Ainsi, $\varphi_t(z_0)$ converge lorsque t tend vers η. Ceci prouve l'existence d'une solution sur $\mathbb{R}_+$ au problème de Cauchy précédent. □

Ce résultat a été démontré en 1978 dans l'article [14] dans le cas du demi-plan. Puis il a été généralisé aux variétés complexes en 1992 dans [2]. Dans ce second article, l'auteur montre comment retrouver, à partir de la condition (2.1), la caractérisation des générateurs de semiflots donnée dans l'article [14]. Nous présentons cette preuve ici.

La proposition suivante ne fait plus apparaître la dérivée G' de G mais est liée au point de Denjoy-Wolff de l'une des (et donc de toutes les) fonctions φ_t. Ce point correspond au point d'annulation de la fonction G.

Proposition 2.2. *Une fonction analytique G engendre un semiflot si et seulement si*

$$\forall z \in \mathbb{D}, \quad G(z) = F(z)(z-\alpha)(\overline{\alpha}z - 1) \tag{2.2}$$

où $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$ et $F : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ est une fonction analytique vérifiant $\operatorname{Re}(F) \geqslant 0$.

La condition $\operatorname{Re}(F) \geqslant 0$ peut être testée à l'aide du théorème de Carathéodory-Toeplitz, voir par exemple le théorème B.1.

Démonstration. On suppose pour commencer que G engendre un semiflot noté $\Phi = (\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Si Φ est trivial, $G \equiv 0$ et le résultat est vrai. On suppose donc maintenant que Φ n'est pas trivial. Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$ le point de Denjoy-Wolff de l'une des (et donc de toutes les) fonctions φ_t. D'après le théorème A.3 de Schwarz-Pick, les fonctions

$$t \mapsto \frac{|1-\overline{\alpha}\varphi_t(z)|^2}{1-|\varphi_t(z)|^2} = (1-|\alpha|^2)\left(\frac{1}{1-\left|\frac{\varphi_t(\alpha)-\varphi_t(z)}{1-\overline{\varphi_t(\alpha)}\varphi_t(z)}\right|^2}\right)$$

où $z \in \mathbb{D}$, sont toutes décroissantes. En différentiant en $t = 0$, on obtient,

$$\operatorname{Re}(G(z)(1-\overline{z}\alpha)(\overline{\alpha}-\overline{z})) \leqslant 0.$$

On pose enfin $F(z) = (\overline{\alpha}z-1)^{-1}(z-\alpha)^{-1}G(z)$, fonction qui est bien définie puisque si $\alpha \in \mathbb{D}$, alors $G(\alpha) = 0$. En outre, $\operatorname{Re}(F) \geqslant 0$ et $\forall z \in \mathbb{D},\ G(z) = F(z)(z-\alpha)(\overline{\alpha}z-1)$.

On suppose maintenant que pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a $G(z) = F(z)(z-\alpha)(\overline{\alpha}z-1)$ avec $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$ et $F : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction analytique telle que $\operatorname{Re}(F) \geqslant 0$. S'il existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tel que $\operatorname{Re}(F(z_0)) = 0$, le principe du maximum impose alors l'existence d'un réel $r \in \mathbb{R}$ tel que $F \equiv ir$. On vérifie alors aisément que pour tout $z \in \mathbb{D},\ 2\operatorname{Re}(\overline{z}G(z)) + (1-|z|^2)\operatorname{Re}(G'(z)) \leqslant 0$ et donc G engendre un semiflot d'après la proposition 2.1. Sinon, pour tout $z \in \mathbb{D}$, $\operatorname{Re}(F) > 0$. Le théorème A.3 Schwarz-Pick appliqué à $\left(\frac{F-1}{F+1}\right)$ donne pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$\frac{|F'(z)|}{2\operatorname{Re}(F(z))} \leqslant \frac{1}{1-|z|^2}.$$

Ensuite,

$$2\overline{z}G(z) + (1-|z|^2)G'(z) = (1-|z|^2)(\overline{\alpha}z-1)(z-\alpha)F'(z) - (|z-\alpha|^2 + |\overline{\alpha}z-1|^2)F(z) \leqslant 0.$$

D'où

$$\operatorname{Re}\left(2\overline{z}G(z) + (1-|z|^2)G'(z)\right) \leqslant 0.$$

$\square$

Corollaire 2.3. *Le générateur G d'un semiflot de fonctions analytiques admet des limites radiales presque partout sur $\mathbb{T}$.*

Démonstration. (voir [21, Thm 3.2 et 2.2]) Nous allons montrer que si une fonction F est de partie réelle toujours positive, alors elle appartient à tous les espaces

$$H^p(\mathbb{D}) := \left\{ f \in \mathcal{H}\mathrm{ol}(\mathbb{D}),\ \sup_{0<r<1} \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

pour $p < 1$. On déduit de cela et de la condition (2.2) que la fonction G génératrice d'un semiflot admet des limites radiales presque partout sur $\mathbb{T}$.

On peut supposer, quitte à composer par un automorphisme du disque, que $F(0) = 1$. On note $M : z \mapsto \frac{1+z}{1-z}$ l'application conforme qui envoie le disque $\mathbb{D}$ sur le demi-plan droit $\mathbb{C}_+$. On observe par un calcul direct que la fonction M est dans tous les espaces $H^p(\mathbb{D})$ pour $p < 1$. Notant $\psi = M^{-1} \circ F$, on a $\psi(0) = 0$, ce dont on déduit par le lemme de Schwarz et le principe de subordination de Littlewood que $C_\psi(H^p(\mathbb{D})) \subset H^p(\mathbb{D})$ pour tout $p < 1$. Ainsi, $F = C_\psi(M) \in H^p(\mathbb{D})$. □

Ces trois résultats nous permettent d'énoncer une nouvelle condition caractérisant les semiflots.

Proposition 2.4. *Une fonction analytique G engendre un semiflot si et seulement si G admet des limites radiales presque partout et*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{z\in\mathbb{T}} \mathrm{Re}(\overline{z}G(z)) \leqslant 0. \tag{2.3}$$

Démonstration. Il est clair que la condition (2.1) implique la condition (2.3).

On suppose maintenant que G satisfait la condition (2.3). Dans la mesure où cette condition (2.3) est la restriction de la condition (2.1) au cercle unité, on serait tenté d'appliquer un principe du maximum pour montrer l'implication inverse. Malheureusement, la fonction $z \mapsto \overline{z}G(z)$ n'est pas harmonique. L'idée est donc d'introduire une autre fonction, harmonique cette fois, puis de s'en servir pour montrer le résultat voulu sur G.

La partie réelle de la fonction $z \mapsto \overline{z}G(z)$ coïncide sur le cercle avec celle d'une fonction analytique : en effet, si $G(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, alors on pose $\widetilde{G}(z) = a_1 + (a_2 + \overline{a_0})z + \sum_{n\geqslant 2} a_{n+1} z^n$ et on vérifie facilement que $\mathrm{Re}(\overline{z}G(z)) = \mathrm{Re}(\widetilde{G}(z))$ pour tout $z \in \mathbb{T}$. Cette dernière fonction $\widetilde{G}$ a donc une partie réelle négative sur le cercle unité $\mathbb{T}$, ce dont on déduit par principe du maximum que $\sup_{z\in\mathbb{D}} \mathrm{Re}(\widetilde{G}(z)) \leqslant 0$. On pose $H(z) = z\widetilde{G}(z)$. Cette fonction H vérifie la condition (2.2) avec $\alpha = 0$ et $F = -\widetilde{G}$ et est donc le générateur d'un semiflot. Elle doit donc satisfaire également la condition (2.1) d'où pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$X := 2\,\mathrm{Re}(\overline{z}H(z)) + (1 - |z|^2)\,\mathrm{Re}\,H'(z) \leqslant 0.$$

Il vient alors que

$$\begin{aligned}
X &= \operatorname{Re}\left((1+|z|^2)a_1 + 2(\overline{a_0}+a_2)z + \sum_{k=3}^{\infty} a_k z^{k-1}(k-(k-2)|z|^2)\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(2a_0\overline{z} + (1+|z|^2)a_1 + 2a_2 z + \sum_{k=3}^{\infty} a_k z^{k-1}(k-(k-2)|z|^2)\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(2\left(a_0\overline{z} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{k-1}|z|^2\right) + (1-|z|^2)\sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}\right) \\
&= 2\operatorname{Re}(\overline{z}G(z)) + (1-|z|^2)\operatorname{Re}(G'(z)),
\end{aligned}$$

qui est le résultat souhaité. □

Pour terminer cette section, nous allons présenter un dernier test. Ce test, très grossier, sera une condition suffisante, mais non nécessaire, pour déterminer si une fonction analytique $G : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ engendre un semiflot. Cette condition est la suivante :

$$\operatorname{Re}(\alpha_1) + |\overline{\alpha_0} + \alpha_2| + \sum_{n=3}^{\infty} |\alpha_n| \leqslant 0. \tag{2.4}$$

Proposition 2.5.

(i) La condition (2.4) implique la condition (2.1).

(ii) Si $G \in \mathbb{C}_2[X]$ (c'est-à-dire, si G est un polynôme de degré au plus 2), alors G satisfait la condition (2.1) si et seulement si G satisfait la condition (2.4).

(iii) Il existe une fonction polynomiale de degré 3 pour laquelle la condition (2.1) soit vérifiée sans que la condition (2.4) ne le soit.

Démonstration.

(i) La condition (2.1) est équivalente à

$$(1+|z|^2)\operatorname{Re}(\alpha_1) + 2\operatorname{Re}((\overline{\alpha_0}+\alpha_2)z) + \sum_{n=3}^{\infty} \operatorname{Re}(\alpha_n((2-n)|z|^2+n)z^{n-1}) \leqslant 0.$$

Tandis que la condition (2.4) est

$$\operatorname{Re}(\alpha_1) + |\overline{\alpha_0}+\alpha_2| + \sum_{n=3}^{\infty} |\alpha_n| \leqslant 0,$$

c'est-à-dire,

$$(1+|z|^2)\operatorname{Re}(\alpha_1) + (1+|z|^2)|\overline{\alpha_0}+\alpha_2| + \sum_{n=3}^{\infty}(1+|z|^2)|\alpha_n| \leqslant 0.$$

On remarque que $2\operatorname{Re}((\overline{\alpha_0}+\alpha_2)z) \leqslant 2|\overline{\alpha_0}+\alpha_2||z| \leqslant (1+|z|^2)|\overline{\alpha_0}+\alpha_2|$. Puis, d'après l'inégalité arithmético-géométrique que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\frac{1+x^2+(k-1)x^{k+2}}{k+1} \geqslant \sqrt[k+1]{1 \times x^2 \times x^{(k+2)(k-1)}} = x^k,$$

c'est-à-dire que

$$1+x^2 \geqslant x^k((k+1)-(k-1)x^2).$$

On observe alors que

$$\mathrm{Re}(\alpha_n((2-n)|z|^2+n)z^{n-1}) \leqslant |\alpha_n||z^{n-1}|((2-n)|z|^2+n) \leqslant (1+|z|^2)|\alpha_n|.$$

(ii) Soit $G(z)=\alpha_0+\alpha_1 z+\alpha_2 z^2$.
Si la condition (2.1) est vraie, alors, en particulier pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$2\,\mathrm{Re}(e^{-i\theta}G(e^{i\theta})) \leqslant 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mathrm{Re}(\alpha_1+(\overline{\alpha_0}+\alpha_2)e^{i\theta}) \leqslant 0.$$

Pour $\theta=-\arg(\overline{\alpha_0}+\alpha_2)$, on obtient

$$\mathrm{Re}(\alpha_1)+|\overline{\alpha_0}+\alpha_2| \leqslant 0.$$

(iii) On considère la fonction $G(z)=-z+\frac{z^2}{\sqrt{3}}-\frac{z^3}{\sqrt{3}}$. On remarque que la fonction G ne satisfait pas la condition (2.4). En outre, on remarque que $G(z)=-z(1-\frac{z}{\sqrt{3}}+\frac{z^2}{\sqrt{3}})=-zF(z)$. Nous allons alors montrer que la fonction G satisfait la condition (2.2). Puisque $\mathrm{Re}(F)$ est une fonction harmonique, elle satisfait le principe du maximum. On note h la fonction $\theta \mapsto \mathrm{Re}(F(e^{i\theta})=1-\frac{1}{\sqrt{3}}\cos(\theta)+\frac{1}{\sqrt{3}}\cos(2\theta)$. On remarque que F envoie le disque unité sur le demi-plan droit si et seulement si h est à valeurs positives. On calcule alors

$$h'(\theta)=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\theta)(1-4\cos(\theta)).$$

Il s'en suit que $h'(\theta)=0 \Leftrightarrow \theta=0$ ou $\theta=\pi$ ou $\cos(\theta)=\frac{1}{4}$. Un calcul direct donne alors que : $h(0)=1$, $h(1)=1+\frac{2}{\sqrt{3}}$ et que si $\cos(\theta)=\frac{1}{4}$, alors $h(\theta)=1-\frac{9}{8\sqrt{3}}>0$. D'où G satisfait la condition (2.2) et donc la condition (2.1).

□

2.2 Semigroupes quasi-contractifs

Dans la section précédente, nous avons exhibé plusieurs conditions sur une fonction analytique G permettant de déterminer si cette fonction engendre un semiflot ou non. La question qui nous intéresse davantage est : l'opérateur $A : f \mapsto Gf'$ défini sur le domaine $D(A)=\{f \in H^2(\beta),\ Gf' \in H^2(\beta)\}$ [1] engendre-t-il un semigroupe ? Si l'on souhaite obtenir un semigroupe d'opérateurs de composition sur $H^2(\beta)$, le sujet semble particulièrement proche de celui de la section précédente. Toutefois, ce n'est pas si clair, dans la mesure où l'opérateur de composition par le semiflot doit être bien défini et où cela dépend très fortement de la suite β considérée. La proposition suivante assure qu'avec une hypothèse supplémentaire, deux conditions nécessaires pour que A engendre un semigroupe sont satisfaites.

1. Que $D(A)$ est le domaine qu'il faut considérer à été démontré par Berkson et Porta dans [14, Thm 3.7] dans le cas de l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$. Leur preuve s'adapte immédiatement dans le cas où le point de Denjoy-Wolff est dans l'intérieur du disque, c'est-à-dire lorsque G s'annule dans $\mathbb{D}$. En revanche, lorsque G s'annule uniquement sur $\mathbb{T}$, c'est-à-dire lorsque le point de Denjoy-Wolff du semiflot est sur $\mathbb{T}$, la preuve doit être modifiée en tenant compte de la norme des automorphismes dans l'espace de Hardy pondéré qu'on considère.

Proposition 2.6. *Soit $(\beta_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs telle que $zH^2(\beta) \subset H^2(\beta)$. On suppose que $G \in H^2(\beta)$. L'opérateur A défini par $Af(z) = G(z)f'(z)$ sur $D(A)$ est de domaine dense sur $H^2(\beta)$ et est fermé.*

Démonstration. L'opérateur A est de domaine dense car les hypothèses $zH^2(\beta) \subset H^2(\beta)$ et $G \in H^2(\beta)$ assurent qu'il est bien défini sur les polynômes qui constituent une famille de fonctions dense dans l'espace $H^2(\beta)$.

Pour montrer que A est fermé, on considère une suite convergente $(f_n : z \mapsto \sum_k a_{n,k}z^k) \in (H^2(\beta) \cap D(A))^{\mathbb{N}}$ et deux fonctions $f : z \mapsto \sum_k a_k z^k$ et $g : z \mapsto \sum_k b_k z^k \in H^2(\beta)$ telles que $f_n \to f$ et $Gf'_n \to g$ dans $H^2(\beta)$. On note $G(z) = \sum_k d_k z^k$. En considérant les sommes partielles à l'ordre N (qu'on notera à l'aide d'un indice N) on calcule :

$$\|(Gf'_n - Gf')_N\|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{N} \beta_k^2 \left| \sum_{i+j=k} d_{i-1} j(a_{n,j} - a_j) \right|^2 .$$

Puisque f_n tend vers f dans $H^2(\beta)$, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 |a_{n,k} - a_k|^2 \to 0$$

et donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|a_{n,k} - a_k| \to 0$. D'où,

$$\|(g - Gf')_N\| \leqslant \|(g - Gf'_n)_N\| + \|(Gf'_n - Gf')_N\| \to 0.$$

On a montré que $\forall k \leqslant N$, $b_k = \sum_{i+j=k} j d_{i-1} a_j$ et puisque ceci peut être fait pour tout choix de N, on en conclut que $g = Gf' \in H^2(\beta)$, $Gf'_n \to Gf'$ dans $H^2(\beta)$ et donc que A est fermé. □

Dans la mesure où rien ne permet d'affirmer à coup sûr, que les opérateurs de composition sont bien définis sur un espace $H^2(\beta)$ [2], nous allons nous intéresser dans un premier temps au cas de l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$. Nous avons déjà vu que les opérateurs de composition s'y comportent bien. Dans ce cas, nous allons voir que les semigroupes d'opérateurs de composition sont tous quasi-contractifs.

Proposition 2.7. *Soit $\Phi = (\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un semiflot sur $\mathbb{D}$. Le semigroupe d'opérateurs de composition associé $(C_{\varphi_t})_{t\in\mathbb{R}_+}$ est quasi-contractif sur $H^2(\mathbb{D})$.*

Démonstration. La continuité des fonctions $t \mapsto \varphi_t(0)$ implique que $K := \{\varphi_t(0),\ 0 \leq t \leq 1\}$ est un compact de $\mathbb{D}$. Puisque le générateur G du semiflot Φ est une fonction analytique sur $\mathbb{D}$, on a

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |G(\varphi_t(0))| < \infty.$$

Il vient alors, sachant $\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(z) = G(\varphi_t(z))$, qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $|\varphi_t(0)| \leqslant Mt$, et donc, pour $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2M}$, $|\varphi_t(0)| \leqslant \frac{1}{2}$. En outre, d'après la proposition 1.7,

$$\|C_{\varphi_t}\| \leqslant \left(\frac{1 + |\varphi_t(0)|}{1 - |\varphi_t(0)|} \right)^{1/2},$$

2. Nous verrons plus tard que les espaces de Hardy pondérés dont la norme admet une écriture intégrale sont stables par les opérateurs de composition de symbole injectif.

ce qui implique que $\|C_{\varphi_t}\| \leqslant 1 + O(t)$, et donc qu'il existe une constante $w \geqslant 0$ telle que

$$\|C_{\varphi_t}\| \leqslant e^{wt},$$

pour tout $t \geqslant 0$. □

Nous allons maintenant montrer une « pseudo-réciproque ». Le préfixe « pseudo » venant du fait que nous n'allons pas directement montrer que, sous l'hypothèse « A engendre un semigroupe quasi-contractif », ce semigroupe est un semigroupe de composition. Nous allons seulement montrer que dans ce cas, la fonction G engendre un semiflot Φ. Le pas qu'il nous manque est, encore une fois, que le semigroupe d'opérateurs de composition par le semiflot Φ n'est pas nécessairement bien défini sur l'espace de Hardy considéré. Cela est vrai dans l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ comme nous l'avons maintes fois dit, mais la proposition suivante est également vraie dans certains espaces de Hardy pondérés admettant des noyaux reproduisants. Cette généralisation fera l'objet d'une seconde proposition, avec une preuve un brin plus complexe.

Proposition 2.8. *Si l'opérateur A engendre un semigroupe quasi-contractif sur $H^2(\mathbb{D})$ alors G admet des limites radiales presque partout et vérifie la condition (2.3).*

Démonstration. On remarque, notant $G(z) = \sum_{n\geqslant 0} \alpha_n z^n$, que

$$\sup_{z\in\mathbb{T}} \operatorname{Re}(\overline{z}G(z)) = \sup_{\theta\in\mathbb{R}} \left\{ \operatorname{Re}(\alpha_1) + \operatorname{Re}\left((\overline{\alpha_0} + \alpha_2)e^{i\theta} + \sum_{n=3}^{\infty} \alpha_n e^{i(n-1)\theta} \right) \right\} = \sup_{\theta\in\mathbb{R}} \operatorname{Re} \widetilde{G}(e^{i\theta}),$$

où $\widetilde{G}$ est une fonction analytique dont la partie réelle coïncide avec celle de $z \mapsto \overline{z}G(z)$ sur le cercle unité. Nous avons vu, à l'aide du théorème de Lumer-Phillips qu'un opérateur engendre un semigroupe quasi-contractif si et seulement si son image numérique est de partie réelle majorée. On va donc calculer l'image numérique de A. Soit $f : z \mapsto \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une fonction analytique vérifiant $\|f\| = 1$ et $f \in D(A)$. On a alors,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left(\langle G(z)f'(z), f(z)\rangle\right) &= \operatorname{Re}\left(\left\langle \widetilde{G}(z)zf'(z), f(z) \right\rangle + \overline{\alpha_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{a_{n+1}} \right) \\
&= \operatorname{Re}(\alpha_1) \sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|^2 \\
&\quad + \operatorname{Re}\left((\alpha_2 + \overline{\alpha_0}) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \overline{a_{n+1}} \right) \\
&\quad + \operatorname{Re}\left(\overline{\alpha_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{a_{n+1}} \right) \\
&\quad + \operatorname{Re}\left(\sum_{k=3}^{\infty} \alpha_k \sum_{n=0}^{\infty} n a_n \overline{a_{n+k-1}} \right).
\end{aligned}$$

On considère les fonctions polynomiales (clairement dans $D(A)$) définies par

$$f_N(z) = c_N \sum_{n=1}^{N} \frac{\sqrt{6}e^{-in\theta}}{\pi n} z^n,$$

où c_N est une constante réelle positive choisie pour que $\|f_N\| = 1$. Il est clair que c_N tend vers 1 lorsque N tend vers l'infini. On remarque maintenant que si la condition (2.3) n'est pas satisfaite, il existe un angle θ tel que $\mathrm{Re}\,(\langle Af_N, f_N\rangle)$ tend vers ∞ lorsque N tend vers ∞ (par divergence de la série harmonique). Il s'en suit que si la condition (2.3) n'est pas satisfaite l'opérateur A ne peut pas engendrer de semigroupe quasi-contractif. □

On peut noter que cette preuve s'adapte immédiatement à tous les espaces $H^2(\beta)$ avec $\beta = (n^{-\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$ et $\alpha \geqslant 0$. Dans ce cas, les fonctions polynomiales considérées seront définies par

$$f_N(z) = c_N \sum_{n=1}^{N} \frac{\sqrt{6}e^{-in\theta}}{\pi n^{1-\alpha}} z^n.$$

Nous allons maintenant énoncer une généralisation de cette proposition à des espaces de Hardy à noyaux reproduisants.

Proposition 2.9. *Soit $(\beta_n)_n$ une suite décroissante de réels positifs telle que*

$$\liminf_{n\to\infty} |\beta_n|^{1/n} \geqslant 1$$

et soit $G \in H^2(\beta)$ telle que G admet des limites radiales presque partout et

$$\operatorname*{ess\,sup}_{w\in\mathbb{T}} \mathrm{Re}(\overline{w}G(w)) > 0.$$

Alors

$$\sup \mathrm{Re}\{\langle Af, f\rangle,\ f \in D(A), \|f\|_{H^2(\beta)} = 1\} = +\infty.$$

La condition $\liminf_{n\to\infty} |\beta_n|^{1/n} \geqslant 1$ est exactement celle qui assure que tous les noyaux reproduisants sont des éléments de l'espace $H^2(\beta)$, l'hypothèse sur la décroissance de la suite β vient du lemme suivant.

Lemme 2.10. *Soit $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs décroissante. Alors pour tout entier positif N, il existe $\eta = \eta(N) > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{D}$ avec $|w| > 1 - \delta$, on a*

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{|w|^{2n}}{\beta_n^2} < \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|w|^{2n}}{\beta_n^2}.$$

Démonstration. Par hypothèse, la suite $(1/\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{|w|^{2n}}{\beta_n^2} \leqslant \frac{1}{\beta_N^2}(1 + |w|^2 + \cdots + |w|^{2N}) = \frac{1}{\beta_N^2}\left(\frac{1 - |w|^{2N+2}}{1 - |w|^2}\right).$$

D'autre part, on a

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|w|^{2n}}{\beta_n^2} \geqslant \frac{1}{\beta_{N+1}^2} \sum_{n=N+1}^{\infty} |w|^{2n} = \frac{|w|^{2N+2}}{\beta_{N+1}^2(1 - |w|^2)} \geqslant \frac{|w|^{2N+2}}{\beta_N^2(1 - |w|^2)}.$$

Or, $1-|w|^{2N+2}<|w|^{2N+2}$ si et seulement si $|w|>(1/2)^{1/(2N+2)}$. On pose alors $\eta(N)=1-(1/2)^{1/(2N+2)}$ et on observe que pour tout $w\in\mathbb{D}$ tel que $|w|>1-\eta(N)$, on a

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{|w|^{2n}}{\beta_n^2}<\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{|w|^{2n}}{\beta_n^2}.$$

$\square$

Démonstration de la proposition 2.9. Par hypothèse, il existe $\delta>0$ et une suite $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathbb{D}^{\mathbb{N}}$ telle que $|w_k|\to 1$ et $\mathrm{Re}(\overline{w_k}G(w_k))\geqslant\delta$. De plus, la condition $\liminf_{n\to\infty}|\beta_n|^{1/n}\geqslant 1$ assure que les noyaux reproduisants k_w appartiennent à l'espace $H^2(\beta)$ pour tout $w\in\mathbb{D}$. On considère la suite $(\widehat{k_{w_k}})_{k\in\mathbb{N}}$ des noyaux reproduisants renormalisés associée aux $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire

$$\widehat{k_{w_k}}=\frac{k_{w_k}}{\|k_{w_k}\|_{H^2(\beta)}}.$$

On suppose dans un premier temps que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $k_{w_k}\in D(A)$. Sous cette hypothèse, il suffit de montrer que

$$\lim_{k\to\infty}\mathrm{Re}\left(\langle A\widehat{k_{w_k}},\widehat{k_{w_k}}\rangle_{H^2(\beta)}\right)=+\infty.$$

On remarque que

$$\langle A\widehat{k_{w_k}},\widehat{k_{w_k}}\rangle_{H^2(\beta)}=\langle G\widehat{k_{w_k}}',\widehat{k_{w_k}}\rangle_{H^2(\beta)}=\frac{1}{\|k_{w_k}\|^2_{H^2(\beta)}}G(w_k)k'_{w_k}(w_k),$$

et

$$k'_{w_k}(z)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{n\overline{w_k}^n}{\beta_n^2}z^{n-1}.$$

Il vient alors

$$\langle Ak_{w_k},k_{w_k}\rangle_{H^2(\beta)}=\sum_{n\geq 1}\frac{nG(w_k)\overline{w_k}|w_k|^{2(n-1)}}{\beta_n^2},$$

et donc

$$\langle A\widehat{k_{w_k}},\widehat{k_{w_k}}\rangle_{H^2(\beta)}=\frac{\overline{w_k}G(w_k)}{|w_k|^2}\frac{\sum_{n\geqslant 1}\frac{n|w_k|^{2n}}{\beta_n^2}}{\sum_{n\geqslant 0}\frac{|w_k|^{2n}}{\beta_n^2}}.$$

Pour tout $N\in\mathbb{N}$, on prend $\eta(N)$ le réel donné par le lemme 2.10, et k suffisamment grand pour que $|w_k|>1-\eta(N)$. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{n\geqslant 1}\frac{n|w_k|^{2n}}{\beta_n^2}}{\sum_{n\geqslant 0}\frac{|w_k|^{2n}}{\beta_n^2}}&=\frac{\sum_{n=0}^{N}\frac{n|w_k|^{2n}}{\beta_n^2}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{n|w_k|^{2n}}{\beta_n^2}}{\sum_{n\geqslant 0}^{N}\frac{|w_k|^{2n}}{\beta_n^2}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{|w_k|^{2n}}{\beta_n^2}}\\&\geqslant\frac{(N+1)\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{|w_k|^{2n}}{\beta_n^2}}{2\sum_{N+1}^{\infty}\frac{|w_k|^{2n}}{\beta_n^2}}=\frac{N+1}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi, pour k assez grand (pour que $|w_k|>1-\eta(N)$), on a

$$\mathrm{Re}\left(\langle A\widehat{k_{w_k}},\widehat{k_{w_k}}\rangle_{H^2(\beta)}\right)\geqslant\frac{(N+1)}{2|w_k|^2}\mathrm{Re}(\overline{w_k}G(w_k)).$$

Puisque $\mathrm{Re}(\overline{w_k}G(w_k)) \geqslant \delta$ et que $|w_k|$ tend vers 1, on obtient le résultat souhaité.

Si maintenant $k_{w_k} \notin D(A)$, un calcul similaire donne la même conclusion en considérant la suite de polynômes $(k_{w_k}^M)_{M\geqslant 0}$ définie par

$$k_{w_k}^M = \sum_{n=0}^{M} \frac{\overline{w_k^n}}{\beta_n^2} z^n,$$

qui appartient à $D(A)^{\mathbb{N}}$ et tend vers k_{w_k} dans $H^2(\beta)$. □

Ces derniers résultats peuvent, dans le cas de l'espace de Hardy du disque $H^2(\mathbb{D})$, être résumés en un unique théorème.

Théorème 2.11. *Soit $G \in H^2(\mathbb{D})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'opérateur A engendre un semigroupe d'opérateur de composition sur l'espace $H^2(\mathbb{D})$;*
2. *pour tout $z \in \mathbb{D}$, $2\,\mathrm{Re}\,\overline{z}G(z) + (1-|z|^2)\,\mathrm{Re}\,G'(z) \leqslant 0$:*
3. *l'opérateur A engendre un semigroupe quasi-contractif sur l'espace $H^2(\mathbb{D})$:*
4. *G admet des limites radiales presque partout et* $\operatorname{ess\,sup}_{z\in\mathbb{T}} \mathrm{Re}\,\overline{z}G(z) \leqslant 0$.

Nous voulions caractériser les opérateurs A de la forme $A(f) = Gf'$ qui engendre un semigroupe sur $H^2(\mathbb{D})$. Nous savions que si la fonction analytique G engendre un semiflot, alors A engendre un semigroupe d'opérateur de composition sur $H^2(\mathbb{D})$. Nous savons désormais que la réciproque est vraie. De plus, ces semigroupes d'opérateurs de composition s'avèrent être des semigroupes quasi-contractifs et le théorème précédent atteste que tous les semigroupes quasi-contractifs de $H^2(\mathbb{D})$ de générateur $A(f) = Gf'$ sont des semigroupes d'opérateurs de composition.

Plusieurs questions restent en suspens. La première d'entre elles : existe-t-il et, si oui, quels sont les opérateurs de la forme $A(f) = Gf'$ qui engendre un semigroupe sur $H^2(\mathbb{D})$ qui n'est pas quasi-contractif ? Cette question demeure sans réponse et le problème est toujours ouvert. Une deuxième question concerne les autres espaces de Hardy pondérés, nous avons vu que la plus grande restriction à leur étude vient du fait que ces espaces ne sont pas stables par composition par une fonction analytique. Quels sont les espaces sur lesquels la composition par une fonction analytique est bien définie ? Le théorème 2.11 admet-il un équivalent dans de tels espaces ? C'est l'espace de Dirichlet qui accueillera notre réflexion.

2.3 Sur l'espace de Dirichlet

Nous allons maintenant nous intéresser au cas de l'espace de Dirichlet $\mathcal{D}$. Ainsi, compte tenu de la proposition 2.6, nous ferons l'hypothèse que $G \in \mathcal{D}$ dans toute cette section.

Nous allons voir que, bien qu'un opérateur de composition n'est pas toujours bien défini sur cet espace, nous pourrons tout de même étudier des semigroupes d'opérateurs de composition sur $\mathcal{D}$. Pour cela, nous aurons besoin du résultat suivant qui caractérise les fonctions de l'espace de Dirichlet à l'aide d'une intégrale. Les premiers résultats sur ces espaces peuvent être trouvés dans le livre [22]

Proposition 2.12. *Soit $f \in \mathcal{D}$ une fonction analytique. On note $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, on a*

$$\|f\|_{\mathcal{D}}^2 = |a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} k|a_k|^2 = |f(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \, dA(z),$$

Démonstration. On effectue un calcul direct :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |f'(re^{it})|^2 \, dA(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sum_{n \geqslant 0} \sum_{m \geqslant 0} nm a_n \overline{a_m} r^{n+m-2} e^{i(n-m)t} r \, dt \, dr \\
&= 2 \sum_{n \geqslant 0} n^2 |a_n|^2 \int_0^1 r^{2n-1} \, dr \\
&= \sum_{n \geqslant 0} n |a_n|^2.
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.13. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique. On suppose que la fonction φ est injective. Alors, l'espace de Dirichlet $\mathcal{D}$ est stable par l'opérateur de composition C_φ.*

La condition d'injectivité est nécessaire ici. On peut noter que la composition par un produit de Blaschke infini, par exemple, ne laisse pas stable l'espace de Dirichlet.

Démonstration. La fonction φ étant injective, elle induit une bijection entre $\mathbb{D}$ et $\varphi(\mathbb{D})$. On a alors, pour $f \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |(f \circ \varphi)'(z)|^2 \, dA(z) &= \int_{\mathbb{D}} |f' \circ \varphi(z)|^2 |\varphi'(z)|^2 \, dA(z) \\
&= \int_{\varphi(\mathbb{D})} |f'(w)|^2 \, dA(w) \leqslant \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 \, dA(w),
\end{aligned}$$

où on a effectué le changement de variable $w = \varphi(z)$. Ainsi l'opérateur de composition C_φ est borné sur $\mathcal{D}$. □

La première remarque est que cette preuve s'adapte dans les espaces dont la norme est donnée par une intégrale sur $\mathbb{D}$. Ainsi, nous voyons qu'il existe de nombreux espaces sur lesquels les semigroupes d'opérateurs de composition peuvent être étudiés. L'espace de Dirichlet se présente donc comme un modèle d'étude de nos semigroupes sur ces espaces.

On remarque ensuite que nous avons montré que, comme dans l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$, si $\varphi(0) = 0$ alors $\|C_\varphi\| = 1$. Une conséquence immédiate de ce fait est que la norme d'un opérateur de composition de symbole φ sera toujours inférieure à la norme de l'opérateur de composition par l'automorphisme ψ s'annulant en $\varphi(0)$, via l'inégalité

$$\|C_\varphi\| \leqslant \|C_{\psi \circ \varphi}\| \|C_\psi\| = \|C_\psi\|.$$

Lorsque le symbole ne fixe pas l'origine, il est plus difficile d'obtenir une majoration sur la norme. Cela a été fait dans l'article [34]. Ce résultat nous sera utile par la suite et nous présentons maintenant leur preuve.

Proposition 2.14. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique injective. Notant*

$$L = \ln\left(\frac{1}{1 - |\varphi(0)|^2}\right),$$

on a

$$\|C_\varphi\| \leqslant \sqrt{\frac{L + 2 + \sqrt{L(L+4)}}{2}}.$$

Démonstration. Soit $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ une fonction de l'espace de Dirichlet, qu'on suppose être de norme 1. D'après ce qui précède, on a

$$\begin{aligned}
\|f \circ \varphi\|^2 &\leqslant \|f\|^2 + |f(\varphi(0))|^2 - |f(0)|^2 \\
&= 1 - |c_0|^2 + \left|c_0 + \sum_{n\geqslant 1} c_n \varphi(0)^n\right|^2 \\
&\leqslant 1 - |c_0|^2 + \left(|c_0| + \sqrt{\sum_{n\geqslant 1} n|c_n|^2}\sqrt{\sum_{n\geqslant 1} \frac{|\varphi(0)|^{2n}}{n}}\right)^2 \\
&= 1 - |c_0|^2 + \left(|c_0| + \sqrt{\sum_{n\geqslant 1} n|c_n|^2}\left(\ln\left(\frac{1}{1-|\varphi(0)|^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2.
\end{aligned}$$

Le but est désormais de maximiser la quantité précédente en faisant varier la fonction f choisie. On remarque, en notant

$$\sum_{n\geqslant 1} n|c_n|^2 = x \text{ et donc } |c_0|^2 = 1 - x,$$

que $\|f \circ \varphi\|^2$ est majorée par la fonction de $\Phi : x \mapsto 1 + Lx + 2\sqrt{L}\sqrt{x - x^2}$. On calcule

$$\Phi'(x) = L + \sqrt{L}\frac{1 - 2x}{\sqrt{x - x^2}}, \quad \Phi''(x) = \frac{-\sqrt{L}}{2(x - x^2)^{\frac{3}{2}}} < 0.$$

On en déduit qu'en $x_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{4+L}}$, la fonction Φ atteint son maximum $\frac{L+2+\sqrt{L(L+4)}}{2}$. □

Nous allons maintenant montrer les analogues des théorèmes 2.7 et 2.8 dans le cas de l'espace de Dirichlet.

Proposition 2.15. *Si l'opérateur A est le générateur d'un semigroupe d'opérateur de composition sur $\mathcal{D}$, alors ce semigroupe est quasi-contractif.*

Démonstration. On rappelle que pour t proche de 0, on a

$$\varphi_t(z) \underset{t\to 0}{=} z + G(z)t + o(t).$$

On en déduit, en conservant les notations précédentes

$$L_t = \ln\left(\frac{1}{1 - |\varphi_t(0)|^2}\right) \underset{t\to 0}{=} |G(0)|^2 t^2 + o(t^2),$$

et donc

$$\|C_{\varphi_t}\| \leqslant \sqrt{\frac{L_t + 2 + \sqrt{L_t(L_t+4)}}{2}} \underset{t\to 0}{=} 1 + |G(0)|t + o(t).$$

Il vient alors qu'il existe $w = |G(0)| \geqslant 0$ tel que $\|C_{\varphi_t}\| \leqslant e^{wt}$ pour tout $t \geqslant 0$. □

Proposition 2.16. *Soit A l'opérateur $f \mapsto Gf'$, défini sur $D(A) = \{f \in \mathbb{D},\ Gf' \in \mathcal{D}\}$, dense dans $\mathcal{D}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\operatorname{ess\,sup}_{z\in\mathbb{T}} \operatorname{Re} \overline{z}G(z) \leqslant 0$;
2. $\sup\{\operatorname{Re}\langle Af, f\rangle_{\mathcal{D}},\ f \in D(A), \|f\|_{\mathcal{D}} = 1\} < \infty$.

Démonstration. On suppose que $\operatorname{ess\,sup}_{z\in\mathbb{T}} \operatorname{Re} \overline{z}G(z) \leqslant 0$. On remarque que pour tout $f, g \in \mathcal{D}$, on a

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{D}} = \langle f, zg'\rangle_{H^2(\mathbb{D})} + f(0)\overline{g(0)}.$$

Cette égalité sera considérée formellement au moins, puisqu'il n'est pas dit que la fonction $z \mapsto zg'(z)$ appartienne à l'espace de Hardy. Soit $f \in D(A)$, avec $\|f\|_{\mathcal{D}} = 1$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\langle Af, f\rangle_{\mathcal{D}} &= \operatorname{Re}\langle Gf', zf'\rangle_{H^2(\mathbb{D})} + \operatorname{Re}\left(G(0)f'(0)\overline{f(0)}\right)\\
&= \operatorname{Re}\left(\limsup_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(re^{i\theta})re^{-i\theta}|f'(re^{i\theta})|^2\,d\theta\right) + \operatorname{Re}\left(G(0)f'(0)\overline{f(0)}\right)\\
&= \limsup_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(G(re^{i\theta})re^{-i\theta}\right)|f'(re^{i\theta})|^2\,d\theta + \operatorname{Re}\left(G(0)f'(0)\overline{f(0)}\right)\\
&\leqslant \operatorname{Re}\left(G(0)f'(0)\overline{f(0)}\right) < \infty.
\end{aligned}$$

Réciproquement, on suppose que $\operatorname{ess\,sup} \operatorname{Re} \overline{z}G(z) > 0$. On remarque que la proposition 2.9 ne s'applique pas sur l'espace de Dirichlet. Il va donc falloir trouver autre chose. On note $E \subset \mathbb{T}$ un ensemble de mesure strictement positive tel que pour tout $z \in E$, $\sup \operatorname{Re} \overline{z}G(z) > \delta > 0$, puis on construit la fonction (extérieure) u donnée pour tout $z \in \mathbb{D}$, par

$$u(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{-it}-z} \ln\left(\frac{1}{2}\mathbb{1}_E(z) + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\mathbb{T}}(z)\right)\,dt\right).$$

Compte tenu des propriétés des fonctions extérieures (voir par exemple le chapitre 11 de [41]), la fonction u est harmonique et admet, en presque tout point du cercle $\mathbb{T}$, des limites radiales coïncidant avec la fonction $\frac{1}{2}\mathbb{1}_E + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\mathbb{T}}$. On en déduit que

$$\liminf_{n\to\infty} \operatorname{Re}\langle Gu^n, zu^n\rangle_{H^2(\mathbb{D})} > 0.$$

Chacune des fonctions itérées de u étant bornée (car bornée sur $\mathbb{T}$ et harmonique), elle appartient à l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$. On en déduit, l'existence d'une fonction $f \in \mathcal{D}$ (primitive de u) telle que $\operatorname{Re}\langle Gf', zf'\rangle_{H^2(\mathbb{D})} > 0$. Quitte à tronquer sa série, on peut supposer que $f \in D(A)$. On construit alors une suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{D}$ en posant $f_k' = z^k f'$ et $f_k(0) = 0$. Explicitement, si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, alors

$$f_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{n}{n+k} z^{n+k}.$$

On montre que cette suite tend vers la fonction nulle par théorème de convergence dominée, en effet :

$$\begin{aligned}\langle f_k, f_k\rangle_{\mathcal{D}} &= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \left(\frac{n}{n+k}\right)^2 (n+k) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \frac{n^2}{n+k} \leqslant \|f\|_{\mathcal{D}}^2.\end{aligned}$$

Ainsi, si les fonctions f_k appartiennent au domaine $D(A)$ de A, on voit que

$$\operatorname{Re}\langle Af_k, f_k\rangle_{\mathcal{D}} = \operatorname{Re}\langle \overline{z}Gf_k', f_k'\rangle_{H^2(\mathbb{D})} = \operatorname{Re}\langle Gf', zf'\rangle_{H^2(\mathbb{D})}$$

et donc, après renormalisation,

$$\sup\{\operatorname{Re}\langle Af, f\rangle_{\mathcal{D}},\ f \in \mathbb{D}, \|f\|_{\mathcal{D}} = 1\} = \infty.$$

Si maintenant, les fonctions f_k n'appartiennent pas toutes à $D(A)$, on considère les fonctions tronquées

$$f_k^M(z) = \sum_{n=1}^{M} a_n \frac{n}{n+k} z^{n+k},$$

et un argument similaire à celui effectué pour la proposition 2.8 permet de conclure. □

Les résultats de cette section peuvent être résumés dans le théorème suivant :

Théorème 2.17. *Soit $G \in \mathcal{D}$ et A l'opérateur $f \mapsto Gf'$, défini sur le domaine $D(A) = \{f \in \mathcal{D},\ Gf' \in \mathcal{D}\}$, dense dans $\mathcal{D}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'opérateur A engendre un semigroupe d'opérateurs de composition sur $\mathcal{D}$;*
2. *pour tout $z \in \mathbb{D}$, $2\operatorname{Re}\overline{z}G(z) + (1-|z|^2)\operatorname{Re}G'(z) \leqslant 0$;*
3. *l'opérateur A engendre un semigroupe quasi-contractif sur $\mathcal{D}$;*
4. *G admet des limites radiales presque partout et $\operatorname{ess\,sup}_{z\in\mathbb{T}} \operatorname{Re}\overline{z}G(z) \leqslant 0$;*
5. *$\sup\{\operatorname{Re}\langle Af, f\rangle_{\mathcal{D}},\ f \in D(A), \|f\|_{\mathcal{D}} = 1\} < \infty$;*
6. *l'opérateur A (étendue à son domaine naturel dans $H^2(\mathbb{D})$) engendre un semigroupe d'opérateurs de composition sur $H^2(\mathbb{D})$;*
7. *l'opérateur A (étendue à son domaine naturel dans $H^2(\mathbb{D})$) engendre un semigroupe quasi-contractif sur $H^2(\mathbb{D})$.*

2.4 Quelques exemples

Dans les deux sections précédentes, nous avons caractérisé les opérateurs qui engendrent des semigroupes quasi-contractifs ou, puisque ce sont les mêmes, des semigroupes d'opérateurs de composition sur les espaces de Hardy du disque $H^2(\mathbb{D})$ et de Dirichlet $\mathcal{D}$. Cette étude s'est faite avec une arrière-pensée, celle d'en déduire des résultats sur les semigroupes en question. Ceci nécessite donc d'être capable, étant donné un opérateur A prescrit, de déterminer le semigroupe dont il sera le générateur, ou plus prosaïquement, le semiflot $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ engendré par la fonction G. On sait que celle-ci vérifie l'équation

$$\frac{\partial\varphi_t(z)}{\partial t} = G(\varphi_t(z)).$$

Toutefois, résoudre cette équation, ou de façon plus générale, déterminer ce semiflot n'a rien de facile. Nous allons présenter certains cas particuliers, contenant notamment les exemples de l'article [50]. Ces cas sont exactement ceux où la fonction analytique G génératrice du semiflot $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, est un polynôme de degré 1 ou 2. Dans les autres cas, le problème devient beaucoup plus compliqué.

(i) Pour $G(z) = az + b$. La condition (2.3) devient $\operatorname{Re} a < -|b|$, on a

$$\varphi_t(z) = e^{at}z + \frac{b}{a}(e^{at} - 1).$$

De plus, le point de Denjoy-Wolff α de ce semiflot est $\alpha = -\frac{b}{a} \in \mathbb{D}$.

(ii) Si G *est un polynôme de degré* 2, défini par $G(z) = c(z-a)(z-b)$. La condition (2.3) devient $\operatorname{Re}((a+b)c) > |abc + \overline{c}|$.

– Si $a \neq b$, on obtient

$$\varphi_t(z) = \frac{z(ae^{bct} - be^{act}) + ab(e^{act} - e^{bct})}{z(e^{bct} - e^{act}) + (ae^{act} - be^{bct})},$$

de point de Denjoy-Wolff $\alpha = a \in \mathbb{D}$ si $\operatorname{Re} a < \operatorname{Re} b$ et $\alpha = b \in \mathbb{D}$ si $\operatorname{Re} a > \operatorname{Re} b$. Dans le cas où $\operatorname{Re} a = \operatorname{Re} b$, on observe $\varphi_{t_n} = Id$ pour $t_n = \frac{2\pi n}{\operatorname{Im} a - \operatorname{Im} b}$, et donc φ_t est un automorphisme.

– Si $a = b$, on obtient une autre expression pour φ_t :

$$\varphi_t(z) = \frac{z(1 - act) + a^2ct}{-zct + (1 + act)},$$

de point Denjoy–Wolff $\alpha = a$.

(iii) Lorsque G *est un polynôme de plus haut degré*, nous n'avons pas, en général, d'expression explicite du semigroupe (φ_t). Cependant, nous pouvons exhiber quelques cas particuliers :

– Si $G(z) = c(z-a)^n$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, et tout $z \in \mathbb{D}$,

$$\varphi_t(z) = a + \frac{z - a}{(1 - nct(z-a)^{n-1})^{\frac{1}{n-1}}}.$$

On remarque que si $c = 1$, le seul cas possible est pour $a = 1$.

– Si $G(z) = cz(z^n - a)$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, et tout $z \in \mathbb{D}$,

$$\varphi_t(z) = \frac{ze^{-ct}}{\left(1 - z^n\left(\frac{1-e^{-nct}}{a}\right)\right)^{\frac{1}{n}}}.$$

Chapitre 3

Analyticité

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux semigroupes d'opérateurs de composition qui sont holomorphes. Le chapitre précédent nous ayant permis de caractériser les générateurs de semigroupes d'opérateurs de composition sur l'espace de Hardy et de Dirichlet, nous cherchons maintenant à déterminer si l'holomorphie d'un semigroupe peut-être lue sur son générateur. Ainsi, nous souhaitons trouver une condition supplémentaire sur le générateur pour dire si le semigroupe qu'il engendre est analytique.

Trouver la réponse de ce problème nous a été grandement facilitée par les travaux des articles [6] et [7]. Dans ces articles, les auteurs présentent notamment une extension du théorème de Lumer-Phillips aux semigroupes de contraction holomorphes. La première section présente cette extension.

3.1 Théorème de Lumer-Phillips

Rappelons le théorème de Lumer-Phillips, déjà vu lors du premier chapitre.

Théorème 3.1 (Lumer-Pillips)**.** *Soit A un opérateur sur un espace de Hilbert H. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'opérateur A engendre un semigroupe de contraction ;*
2. *l'opérateur A est dissipatif et pour tout $\lambda > 0$, $\lambda I - A$ est surjectif*[1]*.*

La preuve de ce théorème repose profondément sur le théorème de Hille-Yosida.

Théorème 3.2 (Hille-Yosida)**.** *Soit A un opérateur sur H. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *l'opérateur A engendre un semigroupe de contraction ;*
2. *le domaine de A est dense dans H et pour tout $\lambda > 0$ tel que $\lambda - A$ est inversible, et A vérifie*
$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\| \leqslant 1.$$

Nous présentons maintenant l'extension du théorème de Hille-Yosida aux semigroupes holomorphes. Cette extension nous sera indispensable pour la suite.

1. Dans ce cas, on dit que l'opérateur A est maximal dissipatif.

Théorème 3.3. *Soit A un opérateur de domaine dense sur H. Soit $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) l'opérateur A engendre un semigroupe holomorphe d'angle θ de contractions ;

(ii) pour tout $\lambda \in \Sigma_\theta$ tel que $\lambda - A$ est inversible, et A vérifie

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\| \leqslant 1.$$

Démonstration.

(i)⇒(ii) On va montrer que pour tout $z \in \Sigma_\theta$, l'opérateur zA engendre un semigroupe. Nous pourrons ainsi définir un opérateur T sur les demi-droites du secteur angulaire Σ_θ. Il restera à montrer que l'opérateur ainsi construit fournit une extension holomorphe de semigroupe.

Soit $z \in \Sigma_\theta$. On a, pour tout $\lambda > 0$,

$$\|\lambda(\lambda - zA)^{-1}\| = \left\| \frac{\lambda}{z} \left(\frac{\lambda}{z} - A \right)^{-1} \right\| \leqslant 1.$$

Ainsi, d'après le théorème 3.2 de Hille-Yosida, l'opérateur zA engendre un semigroupe de contraction T_z pour tout $z \in \Sigma_\theta$. On considère l'opérateur sur Σ_θ, $T : re^{i\alpha} \mapsto T_{e^{i\alpha}}(r)$. Cet opérateur étend le semigroupe T_1 et $T(\Sigma_\theta \cap \mathbb{D})$ est incluse dans la boule unité de $\mathcal{L}(H)$. Il suffit donc de prouver que T est holomorphe.

On remarque que sous la condition $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\| \leqslant 1$, on a, pour x dans le domaine de l'opérateur A,

$$\lim_{n\to\infty} n(n - A)^{-1}x = x.$$

On en déduit que pour tout $z \in \Sigma_\theta$ et tout x dans le domaine de A.

$$T(z)x = \lim_{n\to\infty} e^{nzA(n-zA)^{-1}}x = \lim_{n\to\infty} e^{z\frac{n}{z}A\left(\frac{n}{z}-A\right)^{-1}}x.$$

Ainsi, l'opérateur T s'écrit comme limite d'une suite de fonctions holomorphes localement bornées sur Σ_θ qui converge donc localement uniformément vers une fonction holomorphe d'après le théorème de Montel. On a montré que A engendre un semigroupe holomorphe de contractions.

(ii)⇒ (i) Ce sens est une conséquence immédiate du théorème 3.2.

□

Théorème 3.4. *Soit A un opérateur de domaine dense sur H. Soit $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *l'opérateur A engendre un semigroupe holomorphe d'angle θ de contractions ;*
2. *les opérateurs $e^{\pm i\theta}A$ sont dissipatifs et, pour tout $\lambda > 0$, $\lambda I - A$ est surjectif.*

Démonstration. Le sens direct est une conséquence immédiate du théorème 3.1. En effet, si A engendre un semigroupe holomorphe de contractions, alors en particulier, les trois opérateurs A, $e^{i\theta}A$ et $e^{-i\theta}A$ engendrent des semigroupes de contractions.

Montrons le sens indirect. Si les opérateurs $e^{i\theta}A$ et $e^{-i\theta}A$ sont dissipatifs, alors, pour tout $s \in [0,1]$, l'opérateur $se^{i\theta}A + (1-s)e^{-i\theta}A$ l'est aussi. Puis comme cette propriété est stable par multiplication par un réel positif, on en déduit que l'opérateur zA est dissipatif pour tout $z \in \Sigma_\theta$. En particulier, A est dissipatif et $\lambda I - A$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$. On en déduit par le théorème 3.1 de Lumer-Phillips que A engendre un semigroupe de contractions. Puis le théorème 3.2 affirme alors que pour tout $\lambda > 0$, $(\lambda - A)$ est inversible et $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\| \leqslant 1$. Il vient alors que $I - zA = z(z^{-1} - A)$ est inversible dès que $z \in \Sigma_\theta$ et $\|\lambda(\lambda - zA)^{-1}\| \leqslant 1$. La conclusion résulte alors du théorème 3.3. □

3.2 Caractérisation algébrique des opérateurs de composition

Un point important est que l'extension holomorphe, lorsqu'elle existe, d'un semigroupe d'opérateur de composition a le bon goût d'être elle-même un semigroupe de composition. Autrement dit, ce sont les semiflots qui sont a posteriori holomorphes. Pour cela nous aurons besoin de la caractérisation algébrique des opérateurs de composition suivante, dont nous présentons la preuve issue de [35].

Théorème 3.5. *Soit T un opérateur sur $H^2(\mathbb{D})$. L'opérateur T est un opérateur de composition si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(Te_1)^n = Te_n$.*

Démonstration. On suppose que T est un opérateur de composition, on note φ son symbole. On vérifie : $Te_1 = \varphi$ et $Te_n = \varphi^n$. D'où le sens direct.

On suppose maintenant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(Te_1)^n = Te_n$. On note $\varphi = Te_1$. Montrons que $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Pour cela, pour tout $\delta > 0$, on note $E = \{e^{it}, \lim_{r\to 1^-} |\varphi(re^{it})| \geqslant 1 + \delta\}$, cet ensemble est bien défini à un ensemble de mesure nulle près. Il vient

$$\begin{aligned} \|\varphi^n\|^2 &= \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi^n(re^{it})|^2 dt \\ &\geqslant \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_E |\varphi^n(re^{it})|^2 dt \\ &\geqslant m(E)(1+\delta)^{2n} \end{aligned}$$

où $m(E)$ est la mesure de l'ensemble E. Si $m(E) > 0$, on en déduit que $\|\varphi^n\|^2$ diverge lorsque n tends vers ∞, or cela est en contradiction avec $\varphi^n = Ae_n$ qui implique que $\|\varphi^n\| \leqslant \|T\|$. On en déduit que $m(E) = 0$ et donc par principe du maximum $|\varphi| \leqslant 1$. S'il existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tel que $|\varphi(z_0)| = 1$ alors, par principe du maximum encore, la fonction φ est constante, égale à $\alpha \in \mathbb{T}$. Il vient alors,

$$\|T^* e_0\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle T^* e_0, e_n\rangle|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle e_0, Te_n\rangle|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha|^{2n} = \infty,$$

il y a contradiction. Ainsi $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ et l'opérateur de composition C_φ est bien défini. Enfin, T et C_φ coïncident sur la base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par linéarité et continuité, elles sont égales. □

Ce théorème admet un analogue qui s'applique dans le cas des espaces de Hardy pondérés $H^2(\beta)$.

Théorème 3.6. *Soit $T : H^2(\beta) \to H^2(\beta)$ un opérateur borné. L'opérateur T est un opérateur de composition si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(Te_1)^n = Te_n$ et $Te_1(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.*

Démonstration. La preuve s'adapte immédiatement de la preuve précédente grâce à la présence de la condition $Te_1(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. □

Nous pouvons maintenant en déduire que, dans certains espaces de Hardy pondérés (l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ et l'espace de Dirichlet $\mathcal{D}$ notamment), les semigroupes d'opérateurs de composition qui sont holomorphes voient leur extension analytique être constituée d'opérateur de composition.

Corollaire 3.7. *Soit $T = (T(t))_{t \geqslant 0}$ un semigroupe d'opérateurs de composition sur $H^2(\mathbb{D})$, ou plus généralement sur $H^2(\beta)$, où $\beta_n = O(\sqrt{n})$. Si T admet une extension holomorphe sur un secteur angulaire Σ_θ, alors pour tout $\xi \in \Sigma_\theta$, $T(\xi)$ est un opérateur de composition.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. on définit $f_n : \Sigma_\theta \to \mathcal{H}\mathrm{ol}(\mathbb{D})$, $\xi \mapsto \widetilde{T}(\xi)e_n - (\widetilde{T}(\xi)e_1)^n$. Puisque $\widetilde{T}(t)$ est un opérateur de composition pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction f_n est nulle sur $\mathbb{R}_+$. En outre, la fonction f_n est analytique car $T(\xi)e_k$ l'est pour tout $k \in \mathbb{N}$. Il vient alors, par analyticité de f_n sur Σ_θ, que $f_n \equiv 0$.

Il reste à vérifier que pour tout $\xi \in \Sigma_\theta$, $\widetilde{T}(\xi)e_1(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. On suppose que ce n'est pas le cas, alors il existe $\alpha \in \mathbb{D}$ tel que $|\widetilde{T}(\xi)e_1(\alpha)| \geqslant 1$. Puisque $\widetilde{T}(\xi)e_1$ est analytique, on peut supposer soit que $|\widetilde{T}(\xi)e_1(\alpha)| > 1$ ou bien que $\widetilde{T}(\xi)e_1$ est une constante λ de module 1. Dans le premier cas,

$$\frac{|\widetilde{T}(\xi)e_n(\alpha)|}{\|e_n\|} = \frac{|\widetilde{T}(\xi)e_1(\alpha)|^n}{\|e_n\|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

mais cela entre en contradiction avec le fait que $\widetilde{T}(\xi)$ est borné. Dans le second cas, $\widetilde{T}(\xi)$ envoie e_n sur λ^n (y compris lorsque $n = 0$), et donc, si $\widetilde{T}(\xi)$ était borné sur $H^2(\beta)$, on aurait pour tout $f \in H^2(\beta)$,

$$\widetilde{T}(\xi)f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\beta_k^2} \langle e_k, f\rangle.$$

Ainsi, on obtiendrait pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\|\widetilde{T}(\xi)\| \geqslant \|\widetilde{T}(\xi)\left(\sum_{k=0}^{p} e_k\right)\| = \sum_{k=0}^{p} \frac{\lambda^k}{\beta_k^2}.$$

Or la dernière quantité n'est pas bornée lorsque p croit. Ceci contredit le caractère borné de $\widetilde{T}(\xi)$. □

3.3 Semigroupes quasi-contractifs analytiques

Fort des résultats des deux sections précédentes, nous pouvons montrer le résultat suivant. Il nous permettra de caractériser les semigroupes quasi-contractifs et holomorphes à partir de la fonction G associée.

Théorème 3.8. *Soit G une fonction de $H^2(\mathbb{D})$ (resp. $\mathcal{D}$) et soit A un opérateur de domaine $D(A) = \{f \in H^2(\mathbb{D}), Gf' \in H^2(\mathbb{D})\}$ (resp. $\{f \in \mathcal{D}, Gf' \in \mathcal{D}\}$), défini par $Af(z) = G(z)f'(z)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *L'opérateur A engendre un semigroupe quasi-contractif et holomorphe sur $H^2(\mathbb{D})$ (resp. $\mathcal{D}$) ;*
2. *l'opérateur A engendre un semigroupe holomorphe d'opérateurs de composition sur $H^2(\mathbb{D})$ (resp. $\mathcal{D}$) ;*
3. *il existe $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que les opérateurs $e^{i\theta}A$, $e^{-i\theta}A$ et A engendrent des semigroupes d'opérateurs de composition sur $H^2(\mathbb{D})$ (resp. $\mathcal{D}$) ;*
4. *il existe $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que*
$$\sup\left\{\mathrm{Re}\langle e^{\pm i\theta}Af, f\rangle : f \in D(A), \|f\| = 1\right\} < \infty,$$
et pour tout $\lambda > 0$,
$$(A - \lambda I)D(A) = H^2(\mathbb{D}) \text{ (resp. } \mathcal{D}).$$

Démonstration.

1.⇒ 2. On note $(T(t))$ le semigroupe sur le secteur Σ_θ engendré par l'opérateur A. Ce semigroupe est holomorphe, il s'agit donc de montrer que c'est un semigroupe d'opérateurs de composition. D'après le théorème 2.11 (resp. 2.17), la restriction à $\mathbb{R}_+$ de ce semigroupe est un semigroupe d'opérateur de composition. Ainsi, le semigroupe $(T(t))$ est un semigroupe d'opérateurs de composition holomorphe.

2.⇒ 3. On suppose que le semigroupe A engendre un semigroupe holomorphe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ d'opérateurs de composition sur le secteur Σ_θ. D'après le corollaire 3.7, chacun des semigroupes $(T(t))_{t\geqslant 0}$, $(T(e^{i\alpha}t))_{t\geqslant 0}$ et $(T(e^{-i\alpha}t))_{t\geqslant 0}$ pour $\alpha \in]0;\theta[$, est un semigroupe d'opérateurs de composition.

3.⇒ 4. D'après le théorème 2.11 (resp. 2.17), tout semigroupe d'opérateurs de composition est quasi-contractif. De plus, si un semigroupe T est quasi-contractif, il existe $\omega \in \mathbb{R}$ tel que $(e^{-\omega t}T(t))_{t\geqslant 0}$ est un semigroupe de contractions. Le résultat découle alors du théorème 3.1 de Lumer-Phillips.

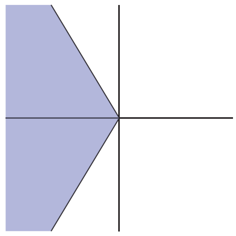
4.⇒ 1. La dernière implication découle du théorème 3.4.

□

Nous avons vu lors du chapitre précédent que l'opérateur $A : f \mapsto Gf'$ engendre un semigroupe d'opérateurs de composition sur $H^2(\mathbb{D})$ ou sur $\mathcal{D}$ si et seulement si
$$\operatorname*{ess\,sup}_{z\in\mathbb{T}} \mathrm{Re}\,\overline{z}G(z) \leqslant 0$$
On peut désormais étendre cette proposition et donner une condition facile pour que ce même opérateur A engendre un semigroupe holomorphe.

Corollaire 3.9. *Soit G une fonction de $H^2(\mathbb{D})$ (resp. $\mathcal{D}$) et soit A un opérateur de domaine $D(A) = \{f \in H^2(\mathbb{D}), Gf' \in H^2(\mathbb{D})\}$ (resp. $\{f \in \mathcal{D}, Gf' \in \mathcal{D}\}$), défini par $Af(z) = G(z)f'(z)$. L'opérateur A engendre un semigroupe holomorphe d'opérateurs de composition sur $H^2(\mathbb{D})$ (resp. $\mathcal{D}$) si et seulement s'il existe $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que pour tout $\alpha \in \{-\theta, 0, \theta\}$,*
$$\operatorname*{ess\,sup}_{z\in\mathbb{T}} \mathrm{Re}(e^{i\alpha}\overline{z}G(z)) \leqslant 0.$$

D'un point de vue géométrique, cette condition dit que l'image de $\mathbb{T}$ par la fonction $z \mapsto \overline{z}G(z)$ est incluse dans un secteur angulaire $-\Sigma_{(\frac{\pi}{2}-\theta)}$ du demi-plan gauche.



On remarque que la condition précédente lorsque α vaut 0 n'a pas d'intérêt en général, puisqu'elle est impliquée par les deux conditions précédentes lorsque α vaut θ et $-\theta$. En fait, cette condition supplémentaire est utile lorsque θ vaut $\frac{\pi}{2}$. Dans tous les autres cas, cette condition est automatiquement satisfaite.

Exemples.

1. On considère le semigroupe d'opérateurs de composition par le semiflot donné par
$$\varphi_t(z) = e^{-t}z.$$
Le générateur de ce semiflot est la fonction $G(z) = -z$ et donc l'image de $\mathbb{T}$ par la fonction $z \mapsto \overline{z}G(z)$ est le singleton $\{-1\}$. Ainsi, ce semigroupe est holomorphe d'angle $\frac{\pi}{2}$.
2. On considère le semigroupe d'opérateurs de composition par le semiflot donné par
$$\varphi_t(z) = \frac{e^{-t}}{(e^{-t}-1)z+1}.$$
Le générateur de ce semiflot est la fonction $G(z) = -z(1-z)$ et donc l'image de $\mathbb{T}$ par la fonction $z \mapsto \overline{z}G(z)$ est le cercle de centre -1 et de rayon 1. Ainsi, ce cercle étant tangent à la droite des imaginaires pures, ce semigroupe n'est pas holomorphe.

3.4 Groupes et analyticité

À titre d'exemple d'application directe du corollaire 3.9, nous allons caractériser les groupes d'opérateurs de composition sur $H^2(\mathbb{D})$ et sur $\mathcal{D}$ et parmi ceux-là, ceux qui sont holomorphes.

Proposition 3.10. *Soit $G \in H^2(\mathbb{D})$ (resp. $G \in \mathcal{D}$), et soit A un opérateur de domaine $D(A) = \{f \in H^2(\mathbb{D}), Gf' \in H^2(\mathbb{D})\}$ (resp. $\{f \in \mathcal{D}, Gf' \in \mathcal{D}\}$), défini par $Af = Gf'$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *L'opérateur A engendre un groupe d'opérateurs de composition ;*
2. $\mathrm{Re}(\overline{z}G(z)) = 0$ *presque partout sur* $\mathbb{T}$.

Démonstration. Ce résultat est une conséquence directe du théorème 2.11 (resp. 2.17). En effet, l'opérateur A engendre un groupe d'opérateur de composition si et seulement si les opérateurs A et $-A$ engendrent tous deux un semigroupe d'opérateurs de composition. $\square$

Corollaire 3.11. *Le seul groupe d'opérateurs de composition sur $H^2(\mathbb{D})$ ou sur $\mathcal{D}$ qui est holomorphe est le semigroupe trivial.*

Démonstration. Ceci résulte immédiatement du corollaire 3.9 et de la proposition 3.10. $\square$

Ce corollaire peut également être vu comme une conséquence d'un résultat plus général : un groupe holomorphe est continu en 0, et donc son générateur est borné (cf. [51]). Or, le générateur d'un groupe d'opérateurs de composition non trivial n'est jamais borné.

Exemple. Le semigroupe $(C_{\varphi_t})_{t\in\mathbb{R}_+}$ d'opérateurs de composition est un groupe si et seulement si pour un (et donc pour tout) $t_0 \in \mathbb{R}_+$, l'opérateur $C_{\varphi_{t_0}}$ est inversible, c'est-à-dire si et seulement si (φ_t) est un semiflot d'automorphismes. Dans ce cas, le semiflot satisfait l'égalité $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$. En considérant le semiflot d'automorphismes donné par

$$\varphi_t(z) = \frac{z + \tanh t}{1 + z \tanh t}$$

dont le générateur est la fonction $G(z) = 1 - z^2$, on voit que $\overline{z}G(z) = -2i\,\mathrm{Im}(z) \in i\mathbb{R}$. La condition donnée est bien vérifiée.

Remarque. L'exemple de la fonction $G(z) = z(z-1)$ montre qu'il est possible qu'un semigroupe d'opérateurs de composition ne soit ni holomorphe ni un groupe.

Chapitre 4

Compacité

Ainsi que l'indique l'intitulé de ce chapitre, nous allons maintenant étudier la compacité des semigroupes d'opérateurs de composition. Il est important ici de concilier la notion de compacité d'un opérateur et celle d'un semigroupe. Nous allons dans un premier temps rappeler les principaux résultats connus concernant la compacité des opérateurs de composition, en donnant en particulier deux caractérisations, l'une nécessaire, l'autre suffisante, avant d'énoncer le bon critère. Puis, nous parlerons de la compacité d'un semigroupe d'opérateurs de composition après avoir classé ceux-ci en deux catégories selon la classe de leur semiflot. Enfin, nous étudierons la compacité des semigroupes d'opérateurs de composition qui sont holomorphes.

Dans tous ce chapitre, lorsque nous considèrerons un espace $H^2(\beta)$, nous supposerons implicitement cet espace stable par les semigroupes d'opérateurs de composition.

4.1 Opérateurs de composition compacts

Commençons par rappeler la définition d'un opérateur compact.

Définition 4.1. Un opérateur T est dit *compact* si l'image de la boule unité par T est d'adhérence compacte.

En particulier, un opérateur de rang fini est compact. En outre, dans un espace de Hilbert tel que $H^2(\beta)$, un opérateur borné est compact si et seulement s'il est limite d'opérateurs bornés de rang fini. De plus, il est possible de montrer que si un opérateur est compact, son spectre est nécessairement dénombrable. Nous allons maintenant montrer une caractérisation équivalente de la compacité, valable pour les opérateurs de composition dans les deux espaces de fonctions que sont l'espace de Hardy et l'espace de Dirichlet.

Proposition 4.2. *Un opérateur de composition C_φ sur $H^2(\mathbb{D})$ (resp. $\mathcal{D}$) est compact si et seulement si pour toute suite bornée de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $H^2(\mathbb{D})$ (resp. $\mathcal{D}$) telle que $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ localement uniformément, on a $f_n \circ \varphi \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ dans $H^2(\mathbb{D})$ (resp. $\mathcal{D}$).*

Cette proposition s'énonce dans le cas de les espaces de Hardy et de Dirichlet, mais la preuve se généralise à tout espace $H^2(\beta)$ dont la norme admet une écriture intégrale. Nous montrons ce résultat.

Démonstration.

- On suppose que C_φ est compact. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $H^2(\beta)$ telle que $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ localement uniformément. La suite des fonctions $f_n \circ \varphi$ admet, par compacité de l'opérateur C_φ, une sous-suite qui converge dans $H^2(\beta)$. Puisque $\{\varphi(z)\}$ est un ensemble compact pour tout $z \in \mathbb{D}$, il vient que $f_n(\varphi(z)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, la limite de la sous-suite est la fonction nulle. Cet argument peut-être appliqué à toute suite extraite de la suite $(f_n \circ \varphi)_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit que la suite $(f_n \circ \varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ elle-même tend simplement vers la fonction nulle. En outre, la fonction φ étant continue, la suite $(f_n \circ \varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ converge localement uniformément vers 0, on en déduit $f_n \circ \varphi \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ dans $H^2(\beta)$.
- Réciproquement, soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est normale, on peut donc en extraire une suite $(g_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge localement uniformément vers une fonction g de $H^2(\beta)$. La suite des fonctions $g_{n_k} - g$ est alors bornée dans $H^2(\beta)$ et converge localement uniformément vers la fonction nulle. On en déduit que la $g_{n_k} \circ \varphi - g \circ \varphi \underset{n\to 0}{\longrightarrow} 0$ dans $H^2(\beta)$. On a ainsi montré que l'opérateur de composition C_φ est compact.

□

Cette nouvelle caractérisation des opérateurs de composition compacts nous permet d'établir deux conditions sur le symbole φ, l'une nécessaire, l'autre suffisante, pour affirmer que l'opérateur de composition par φ est ou n'est pas compact.

Corollaire 4.3. *S'il existe $0 < \alpha < 1$ tel que pour tout $z \in \mathbb{D}$, $|\varphi(z)| < \alpha$ alors l'opérateur de composition C_φ est compact sur $H^2(\mathbb{D})$ et sur $\mathcal{D}$.*

Remarque. La condition précédente permet d'affirmer que l'opérateur de composition est en fait de classe trace sur l'espace de Hardy (voir [19, p.149]).

Démonstration. Si pour tout $z \in \mathbb{D}$, $|\varphi(z)| < \alpha$, alors $\varphi(\mathbb{D})$ est incluse dans un compact $K \subset\subset \mathbb{D}$. La compacité résulte alors immédiatement de la proposition 4.2. □

Exemple. On considère le semigroupe d'opérateurs de composition par le semiflot des fonctions $\varphi_t : z \mapsto e^{-ct}z$ avec $\operatorname{Re} c > 0$. D'après le corollaire 4.3, chaque élément de ce semigroupe est un opérateur compact.

Corollaire 4.4. *Si la mesure de l'ensemble $\{z \in \mathbb{T}, \lim_{r\to 1^-} |\varphi(rz)| = 1\}$ est strictement positive, alors l'opérateur de composition C_φ n'est pas compact sur tous les espaces $H^2(\beta)$ donnés par une suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée.*

Démonstration. On considère la suite bornée des fonctions $z \mapsto z^n$. Cette suite converge localement uniformément vers 0. L'hypothèse nous permet d'affirmer que la suite des φ^n ne tend pas vers la fonction nulle. Ainsi, au vu de la proposition 4.2, l'opérateur C_φ n'est pas compact. □

Exemple. On considère le semigroupe d'opérateurs de composition par le semiflot des automorphismes $\varphi_t : z \mapsto \frac{(1+e^t)z-1+e^t}{(-1+e^{-t})z+1+e^{-t}}$. D'après le corollaire 4.4, aucun élément de ce semigroupe n'est compact.

Nous allons maintenant énoncer une caractérisation des opérateurs de composition compacts sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$. Cette caractérisation fait intervenir la *fonction de comptage de Nevanlinna* N_φ définie comme suit :

Définition 4.5. Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique. Soit $\omega \neq \varphi(0)$, on note E_ω l'ensemble des antécédents de ω par φ comptés avec multiplicité. Alors

$$N_\varphi(\omega) = -\sum_{z \in E_\omega} \ln|z|$$

avec la convention $N_\varphi(\omega) = 0$ si $E_\omega = \emptyset$.

Théorème 4.6 (Shapiro)**.** *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique, l'opérateur C_φ est compact sur $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si*

$$\lim_{\omega \to 1^-} \frac{N_\varphi(\omega)}{-\ln|\omega|} = 0.$$

Démonstration. Voir [19, p.139]. □

Rappelons que les symboles des opérateurs de composition issus d'un semigroupe sont des fonctions injectives. Dans ce cas, pour tout $\omega \in \mathbb{D}$, l'ensemble E_ω contient au plus un élément. La caractérisation ci-dessus s'exprime alors en termes plus simples, et la notion géométrique de dérivée angulaire peut être évoquée.

Théorème 4.7. *Si la fonction analytique $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est injective, alors l'opérateur de composition C_φ est compact sur $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si φ n'a pas de dérivée angulaire sur $\mathbb{T}$, c'est-à-dire, pour tout $\xi \in \mathbb{T}$,*

$$\lim_{z \to \xi} \frac{1-|z|}{1-|\varphi(z)|} = 0.$$

Démonstration. Soit $\omega \in \varphi(\mathbb{D})$, et soit z l'antécédent de ω par φ. On a alors $N_\varphi(\omega) = -\ln|z|$. Maintenant, si $|\omega|$ tend vers 1, alors $|z|$ aussi par continuité de φ et compacité de $\overline{\mathbb{D}}$. Dans ce cas, $-\ln|\omega|$ est équivalent à $1-|\omega|$ et $-\ln|z|$ à $1-|z|$. Il vient alors, d'après le théorème 4.6 que l'opérateur C_φ est compact si et seulement si

$$\lim_{\omega \to 1^-} \frac{\ln|z|}{\ln|\omega|} = 0$$

soit, si et seulement si pour tout $\xi \in \mathbb{T}$,

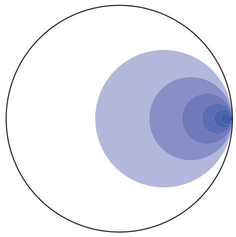
$$\lim_{z \to \xi} \frac{1-|z|}{1-|\varphi(z)|} = 0.$$

□

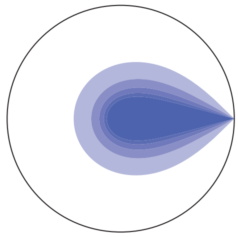
Exemple.

1. On considère le semigroupe d'opérateurs de composition par le semiflot des fonctions $\varphi_t : z \mapsto e^{-t}z + 1 - e^{-t}$. D'après le théorème 4.7, aucun des opérateurs de composition associés à ce semigroupe n'est compact.

2. On considère le semigroupe d'opérateurs de composition par le semiflot des fonctions $\psi_t : z \mapsto 1-(1-z)^{e^{-t}}$. D'après le théorème 4.7, les opérateurs de composition associés à ce semigroupe sont compacts.



$\varphi_{\frac{1}{2}t}(\mathbb{D})$ pour $t \in [\![1,8]\!]$



$\psi_{\ln t}(\mathbb{D})$ pour $t \in [\![2,6]\!]$

Citons maintenant trois applications directes de ces résultats aux cas des semigroupes d'opérateurs de composition.

Théorème 4.8. *Soit $\delta > 0$. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$\operatorname{Re}(\overline{z}G(z)) \leqslant -\delta \quad \textit{pour tout } z \textit{ tel que } 1-\varepsilon < |z| < 1.$$

Alors, l'opérateur A, défini par $Af = Gf'$, engendre un semigroupe T d'opérateurs de composition sur $H^2(\mathbb{D})$ ou sur $\mathcal{D}$ dont les éléments $T(t)$ sont compacts pour tout $t > 0$.

Démonstration. On commence par remarquer que l'hypothèse implique en particulier que

$$\operatorname*{ess\,sup}_{z\in\mathbb{T}} \operatorname{Re}(\overline{z}G(z)) \leqslant 0$$

et donc que l'opérateur A engendre un semigroupe d'opérateurs de composition $(C_{\varphi_t})_{t\in\mathbb{R}}$ sur $H^2(\mathbb{D})$ et sur $\mathcal{D}$ d'après les théorèmes 2.11 et 2.17.

On se fixe un complexe $z \in \mathbb{D}$. Pour tout $t > 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}|\varphi_t(z)|^2 &= 2\operatorname{Re}\left(\overline{\varphi_t(z)}\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(z)\right) \\ &= 2\operatorname{Re}\left(\overline{\varphi_t(z)}G(\varphi_t(z))\right) \end{aligned}$$

Ainsi, dès que $1-\varepsilon < |\varphi_t(z)| < 1$,

$$\frac{\partial}{\partial t}|\varphi_t(z)|^2 \leqslant -2\delta.$$

De plus, par compacité, il existe un réel $M > 0$ tel que

$$\frac{\partial}{\partial t}|\varphi_t(z)|^2 \leqslant M$$

lorsque que $|\varphi_t(z)| \leqslant 1-\varepsilon$.

Nous allons montrer que la fonction φ_t vérifie les conditions du corollaire 4.3 pour tout $t > 0$, nous cherchons donc à montrer l'existence d'un $\alpha_t \in]0;1[$ convenable. Au vu des propriétés des semigroupes, il suffit de montrer leurs existences pour t proche de 0. On choisit ainsi un réel $t_0 > 0$ tel que

$$a := (1-\varepsilon)^2 + t_0 M < 1.$$

On pose

$$E = \{t \in [0, t_0] : |\varphi_t(z)| \leqslant 1-\varepsilon\}, \quad F = [0, t_0] \backslash E,$$

où E est éventuellement vide si $|\varphi_t(z)| \leqslant (1-\varepsilon)$ pour tout $t \in [0, t_0]$, et où F est éventuellement vide si $|\varphi_t(z)| > (1-\varepsilon)$ pour tout $t \in [0, t_0]$. De plus, car continuité de la fonction $t \mapsto \varphi_t(z)$, choisir t_0 suffisamment petit pour que F soit un intervalle de la forme $[0; \tau]$. On a alors, $|\varphi_t(z)|^2 \leqslant a$ pour tout $t \in E$ et $|\varphi_t(z)|^2 \leqslant |z|^2 - 2\delta t$ pour tout $t \in F$.

Ainsi $\|\varphi_t\|_\infty^2 \leqslant \max\{1-2\delta t, a\} < 1$ pour tout $0 < t \leqslant t_0$ et donc C_{φ_t} compact pour tout $t \in [0, t_0]$ et donc pour tout $t > 0$. □

Corollaire 4.9. *Soit $\eta > 0$. On suppose que $\operatorname{ess\,sup}_{z \in \mathbb{T}} \operatorname{Re}(\overline{z} G(z)) \leqslant -\eta$, et que $\operatorname{Re} G'$ est borné sur $\mathbb{D}$. Alors, l'opérateur A, défini par $Af = Gf'$, engendre un semigroupe d'opérateurs de composition T sur $H^2(\mathbb{D})$ et sur $\mathcal{D}$ tel que pour tout $t > 0$, l'opérateur $T(t)$ est compact.*

Démonstration. On note $K(z) := G(z) + \eta z$, de sorte que $\operatorname{ess\,sup}_{z \in \mathbb{T}} \operatorname{Re}(\overline{z} K(z)) \leqslant 0$. La fonction K satisfait donc la condition (2.3) qui est équivalente à la condition (2.1) :

$$2 \operatorname{Re}(\overline{z} K(z)) + (1-|z|^2) \operatorname{Re} K'(z) \leqslant 0 \qquad (z \in \mathbb{D}),$$

et donc pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$2 \operatorname{Re}(\overline{z} G(z)) + (1-|z|^2) \operatorname{Re} G'(z) \leqslant -\eta(1+|z|^2) \leqslant -\eta.$$

Ainsi, si $\|\operatorname{Re} G'(z)\|_\infty \leqslant M$, on a $\operatorname{Re}(\overline{z} G(z)) \leqslant -\eta$ pour tout $|z| \geqslant 1 - \dfrac{\eta}{2M}$ et le résultat découle du théorème 4.8. □

Parmi les exemples simples d'applications des deux résultats précédents, on peut citer les fonctions $G(z) = -z$ et $G(z) = z(z^2-2)$ génératrices de semiflots. Cependant, un semigroupe d'opérateurs de composition peut être compact pour tout $t > 0$ sans vérifier les conditions du théorème 4.8 ou de son corollaire. C'est le cas de l'exemple, issu de [50], de la fonction $G(z) = (1-z)\log(1-z)$, qui vérifie $\operatorname{ess\,sup}_{z \in \mathbb{T}} \overline{z} G(z) = 0$ mais qui engendre un semigroupe d'opérateurs compacts sur $\mathbb{R}_+^*$. On remarque toutefois que tous les exemples de semigroupes d'opérateurs compacts voient les points de Denjoy-Wolff de leurs semiflots appartenir au disque unité ouvert $\mathbb{D}$. Ceci est un fait général :

Proposition 4.10 (Shapiro)**.** *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique telle que C_φ est un opérateur de composition compact sur $H^2(\mathbb{D})$. Alors, le point de Denjoy-Wolff de φ appartient à $\mathbb{D}$.*

Démonstration. Voir [44]. □

4.2 Les deux modèles de semiflots

La proposition 4.10 nous permet de voir que les choses se passent différemment selon que le point de Denjoy-Wolff appartient ou non au disque unité $\mathbb{D}$. Nous allons ici le confirmer et présenter ces deux cas aux travers de deux modèles très simples qui permettront de comprendre le comportement de tous les semiflots selon cette distinction. Les résultats importants sont présentés par exemple dans le livre [1], et ce sont ces preuves que nous mettons ici en avant. Cela commence avec un lemme :

Lemme 4.11. *On note* $\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ *le demi-plan complexe supérieur. Toute fonction analytique* $f : \mathbb{H}_+ \to \mathbb{C}$ *telle que* $\operatorname{Re} f' \geqslant 0$ *est constante ou injective.*

Démonstration. S'il existe $z \in \mathbb{H}_+$ telle que $\operatorname{Re} f'(z) = 0$ alors, par principe du maximum, il existe $b \in \mathbb{R}$ telle que $f' \equiv ib$ et donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $z \in \mathbb{H}_+$, $f(z) = a + ibz$ et le lemme est alors vérifié. On suppose donc que pour tout $z \in \mathbb{H}_+$, $\operatorname{Re} f' > 0$. On suppose que la fonction f n'est pas injective (et donc qu'il existe $z_1, z_2 \in \mathbb{H}_+$, $z_1 \neq z_2$ tels que $f(z_1) = f(z_2)$) mais nous n'allons pas montrer qu'elle est constante, juste que ce cas ne peut arriver. Considérant le chemin $t \mapsto (1-t)z_1 + tz_2$ de z_1 à z_2, on a :

$$0 = f(z_2) - f(z_1) = (z_2 - z_1) \int_0^1 f'((1-t)z_1 + tz_2)dt.$$

et donc,

$$0 = \operatorname{Re} \int_0^1 f'((1-t)z_1 + tz_2)dt = \int_0^1 \operatorname{Re} f'((1-t)z_1 + tz_2)dt > 0,$$

ce qui est absurde. $\square$

Dans ce lemme, le domaine de la fonction f est $\mathbb{H}_+$, cela vient du fait que c'est le domaine sur lequel on appliquera ce résultat, cependant, n'importe quel domaine convexe de $\mathbb{C}$ aurait pu convenir.

Si le point de Denjoy-Wolff est sur le cercle unité $\mathbb{T}$, à une rotation près, on peut supposer que ce point est 1. Aussi, nous noterons Φ_1 la classe des semiflots dont le point de Denjoy-Wolff est sur $\mathbb{T}$. Ceux-ci suivent tous le même modèle : la proposition suivante montre que, quitte à changer de domaine, le semiflot est en fait une translation (verticale).

Proposition 4.12. *Un semiflot sans point fixe, c'est-à-dire dont le point de Denjoy-Wolff* $\alpha \in \mathbb{T}$*, est de la forme*

$$\varphi_t(z) = h^{-1}\left(h(z) + it\right), \tag{4.1}$$

où h *est une application conforme de* $\mathbb{D}$ *vers un domaine* $\Omega = h(\mathbb{D}) \subset \mathbb{C}$ *stable par translation verticale.*

Démonstration. On note G le générateur du semiflot $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. La fonction G vérifie la condition (2.2) qui s'exprime, puisque $\alpha \in \mathbb{T}$,

$$G(z) = F(z)(z - \alpha)(\overline{\alpha} z - 1) = \overline{\alpha} F(z)(z - \alpha)^2,$$

où $F : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ est une fonction analytique telle que $\operatorname{Re} F \geqslant 0$. La fonction F ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$, en effet, s'il existait $z \in \mathbb{D}$ tel que $F(z) = 0$, alors on aurait par principe du maximum

$F \equiv 0$ et donc $G \equiv 0$, le semiflot $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ serait le semiflot trivial (identiquement égale à la fonction identité) et aurait donc un point fixe (et même plusieurs). On note $j : \mathbb{D} \to \mathbb{H}_+$ l'application conforme de $\mathbb{D}$ vers $\mathbb{H}_+$, qui envoie $\alpha \in \mathbb{T}$ en l'infini,

$$j(z) = \frac{i}{2}\frac{\alpha + z}{\alpha - z}.$$

On observe que $j'(z) = i\alpha(z-\alpha)^{-2}$. On pose maintenant $g : \mathbb{H}_+ \to \mathbb{C}$ fonction analytique telle que

$$g'(z) = \frac{1}{F(j^{-1}(z))}.$$

Le lemme 4.11 permet d'affirmer que la fonction g est injective, puisque non constante, et donc que la fonction $h := g \circ j : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ l'est aussi. De plus, pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$h'(z) = j'(z)g'(j(z)) = \frac{1}{F(z)}\frac{i\alpha}{(z-\alpha)^2} = \frac{i}{G(z)},$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial t} h \circ \varphi_t(z) = G(\varphi_t(z))h'(\varphi_t(z)) = G(\varphi_t(z))\frac{i}{G(\varphi_t(z))} = i.$$

On en déduit que $h(\varphi_t(z)) = h(z) + it$, pour tout $z \in \mathbb{D}$, et que le domaine $\Omega = h(\mathbb{D})$ est invariant par translation verticale. □

Le cas de la classe Φ_1 ne nous intéressera plus dans ce chapitre, puisque nous avons vu que les opérateurs de composition compacts sont de point de Denjoy-Wolff dans le disque $\mathbb{D}$. Dans ce cas, à une transformation de Möbius près, on peut supposer que ce point est 0. Aussi nous noterons Φ_0 la classe des semiflots dont le point de Denjoy-Wolff est appartient à $\mathbb{D}$. Nous allons maintenant montrer que, quitte à changer le domaine pour un domaine spiralé, ceux-ci sont tous des rotations-contractions.

Proposition 4.13. *Un semiflot avec point fixe, c'est-à-dire dont le point de Denjoy-Wolff $\alpha \in \mathbb{D}$, est de la forme*

$$\varphi_t(z) = h^{-1}\left(e^{-ct}h(z)\right), \tag{4.2}$$

où $\operatorname{Re} c \geqslant 0$ *et h est une application conforme de $\mathbb{D}$ vers un domaine $\Omega = h(\mathbb{D})$ qui est* c-spiralé, *c'est-à-dire, stable par multiplication par e^{-ct} pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.*

Démonstration. On note G le générateur du semiflot $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. La fonction G vérifie la condition (2.2),

$$G(z) = F(z)(z-\alpha)(\overline{\alpha}z - 1),$$

où $F : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ est une fonction analytique telle que $\operatorname{Re} F \geqslant 0$. On peut supposer que la fonction F ne s'annule pas sur $\mathbb{D}$ car, par le même argument que précédemment, si c'était le cas, le semiflot serait trivial et dans ce cas le résultat devient clair en posant $c = 0$ et h égal à la fonction identité. On note pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$\psi_\alpha : z \mapsto \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha}z}$$

l'automorphisme de $\mathbb{D}$ qui échange 0 et α et on rappelle que ψ_α est son propre inverse. On considère une fonction analytique $g : \mathbb{H}_+ \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $z \in \mathbb{H}_+$,

$$g'(z) = \frac{1}{(1-|\alpha|^2)F \circ \psi_\alpha(e^{2i\pi z})}.$$

On observe que, pour tout $z \in \mathbb{H}_+$, $g'(z+1) = g'(z)$ et donc qu'il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{H}_+$, $g(z+1) = g(z) + \mu$. D'après le lemme 4.11, la fonction g est injective, on en déduit d'une part que $\mu \neq 0$, d'autre part, que g est une fonction conforme de $\mathbb{H}_+$ vers $g(\mathbb{H}_+)$. De plus, puisque pour tout $z \in \mathbb{H}_+$, $g(z+1) = g(z) + \mu$, il existe une fonction $\hat{g}$ conforme de $\mathbb{D}^*$ vers son image. telle que pour tout $z \in \mathbb{H}_+$,

$$\hat{g}(e^{2i\pi z}) = e^{\frac{2i\pi}{\mu} g(z)}.$$

En dérivant cette relation, on observe que pour tout $z \in \mathbb{D}^*$,

$$z\hat{g}'(z) = \frac{1}{\mu} \frac{\hat{g}(z)}{(1-|\alpha|^2)F \circ \psi_\alpha(z)},$$

et donc, en posant $h = \hat{g} \circ \psi_\alpha$, on a pour tout $z \in \mathbb{D} \backslash \{\alpha\}$,

$$h'(z) = \frac{h(z)\psi'_\alpha(z)}{\mu(1-|\alpha|^2)F(z)\psi_\alpha(z)} = -\frac{1}{\mu}\frac{h(z)}{G(z)}.$$

On en déduit alors pour tout $z \in \mathbb{D} \backslash \{\alpha\}$,

$$\frac{\partial}{\partial t} h \circ \varphi_t(z) = G(\varphi_t(z))h'(\varphi_t(z)) = -\frac{1}{\mu}G(\varphi_t(z))\frac{h(\varphi_t(z))}{G(\varphi_t(z))} = -\frac{1}{\mu}h(\varphi_t(z)),$$

ce qui montre que $h \circ \varphi_t = e^{-ct}h$ avec $c = \frac{1}{\mu}$. Il ne reste qu'à étendre la fonction conforme h au disque $\mathbb{D}$ en entier, en attribuant à α une valeur $h(\alpha)$. D'après la relation précédente, $h(\alpha)$ ne peut valoir que 0 ou ∞ et quitte à remplacer c par $-c$ et h par $\frac{1}{h}$, on peut supposer que $\mathrm{Re}(c) \geqslant 0$ et $h(\alpha) = 0$. $\square$

Dans les deux modèles (4.1) et (4.2), la fonction h qui apparaît est appelée *fonction de Koenig associée au semiflot* φ.

Nous avons montré ici que quitte à changer le domaine, il n'y a que deux sortes de semiflots : les translations et les contractions-rotations. Cette classification nous permettra ainsi de construire des exemples « visuels », et trouver un semiflot adapté à nos besoins revient donc à trouver un domaine sur lequel le semiflot de translation ou de contraction-rotation a les bonnes propriétés. Citons une application de ce fait :

Lemme 4.14. *Soit* $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *un semiflot sur* $\mathbb{D}$ *dont le point de Denjoy–Wolff est* 0. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *il existe* $t_0 > 0$ *tel que* $\|\varphi_{t_0}\|_\infty < 1$ *;*
2. *il existe* $t_0 > 0$ *tel que* $\|\varphi_t\|_\infty < 1$ *pour tout* $t \geqslant t_0$ *;*
3. *dans le modèle* (4.2) *du semiflot* $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$*, le domaine* Ω *est borné et* $\mathrm{Re}\, c > 0$.

Démonstration. L'implication 1. $\Rightarrow$ 2. découle immédiatement de la propriété

$$\varphi_t(z) = \varphi_{t_0}(\varphi_{t-t_0}(z))$$

pour tout $t \geqslant t_0$.

Montrons l'implication 2. $\Rightarrow$ 3.. Puisque, pour tout $t \geqslant t_0$, la fonction φ_t n'est pas l'identité sur $\mathbb{D}$, on a $\mathrm{Re}\, c \neq 0$. En effet, si $c = i\theta$, toutes les fonctions $\varphi_{\frac{2k\pi}{\theta}}$ pour $k \in \mathbb{N}$ seraient l'identité. On suppose par l'absurde que le domaine Ω n'est pas borné. Il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Ω tel que $|z_n| \to \infty$. En particulier, $|e^{-ct}z_n| \to \infty$ pour tout $t \geqslant 0$. Puisque $\|\varphi_{t_0}\|_\infty < 1$, il existe $\xi \in \mathbb{D}$ et une sous-suite $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(h^{-1}(e^{-ct_0}z_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers ξ. De plus $e^{-ct_0}z_{n_k} \to h(\xi)$, ceci entre en contradiction avec le fait que la suite $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est non bornée.

Pour l'implication 3. $\Rightarrow$ 1., si $M = \sup\{|z| : z \in \Omega\} < \infty$ et $\mathrm{Re}\, c > 0$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

$$|e^{-ct}h(z)| \leqslant e^{-(\mathrm{Re}\, c)t}M < \varepsilon$$

Pour t suffisamment grand. Ainsi, vu $h(0) = 0$, h^{-1} continue et $\varphi_t(z) = h^{-1}(e^{-ct}h(z))$, il vient que $\|\varphi_t\|_\infty < 1$ pour t suffisamment grand. □

Rappelons qu'un espace topologique est localement connexe si chacun de ses points admet une base de voisinages connexes.

Théorème 4.15. *Soit $(C_{\varphi_t})_{t\in\mathbb{R}_+}$ un semigroupe d'opérateurs de composition dont tous les éléments (sauf C_{φ_0}) sont des opérateurs compacts sur $H^2(\mathbb{D})$ tel que le domaine $\partial\Omega$ du modèle* (4.2) *est localement connexe. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *il existe $t_0 > 0$ tel que $\|\varphi_{t_0}\|_\infty < 1$;*
2. *pour tout $t > 0$ on a $\|\varphi_t\|_\infty < 1$.*

Démonstration. Il suffit de prouver 1. $\Rightarrow$ 2.

On suppose qu'il existe $t_1 > 0$ tel que $\|\varphi_{t_1}\|_\infty = 1$. Alors, il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{D}$ telle que $h^{-1}(e^{-ct_1}h(z_n)) \to e^{i\theta} \in \mathbb{T}$.

D'après le lemme 4.14, le domaine Ω du modèle (4.2) est borné, il existe donc une sous-suite de $(h(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers un point $\xi_1 \in \overline{\Omega}$. De plus, $\xi_1 \in \partial\Omega$, en effet, sinon on aurait $e^{-ct_1}\xi_1 \in \Omega$, et donc $h^{-1}(e^{-ct_1}\xi_1) \in \mathbb{D}$, ce qui est une contradiction. On a également $e^{-ct_1}\xi_1 \in \partial\Omega$.

Il s'en suit que l'arc $\{e^{-ct}\xi_1 : 0 \leqslant t \leqslant t_1\}$ est entièrement contenu dans $\partial\Omega$, et puisque $\partial\Omega$ est localement connexe, la fonction h s'étend continument à $\overline{\mathbb{D}}$, et envoie $\mathbb{T}$ sur $\partial\Omega$ voir par exemple [40, Thm. 2.1, p. 20]. Ainsi, $h^{-1}\{e^{-ct}\xi_1 : 0 \leqslant t \leqslant t_1/2\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{T}$ de mesure positive sur lequel $|\varphi_{\frac{t_1}{2}}(z)| = 1$. D'où $C_{\varphi_{\frac{t_1}{2}}}$ n'est pas compact d'après le corollaire 4.4, il y a contradiction. □

4.3 Semigroupes compacts

4.3.1 Finalement, immédiatement ou pas

Rappelons que l'ensemble des opérateurs compacts est un idéal bilatère des opérateurs bornés. Cette brève remarque impose que lorsqu'un élément d'un semigroupe est un opérateur compact, tous les suivants le sont forcément.

Définition 4.16. Un semigroupe $(T(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est *compact pour* $t > t_0$ si pour tout $t > t_0$, l'opérateur $T(t)$ est compact. En particulier, on dit que

- un semigroupe $(T(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est *immédiatement compact* s'il est compact pour $t > 0$,
- un semigroupe $(T(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est *finalement compact* s'il est compact pour $t > t_0 > 0$,
- un semigroupe est *non compact* sinon.

Profitons-en pour donner un exemple de construction d'un semigroupe d'opérateurs de composition finalement mais pas immédiatement compact.

Exemple. Soit h la fonction de Riemann envoyant $\mathbb{D}$ sur la région étoilée

$$\Omega := \mathbb{D} \cup \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}(z) < 2 \quad \text{et } 0 < \mathrm{Im}(z) < 1\},$$

avec $h(0) = 0$. Puisque $\partial\Omega$ est une courbe de Jordan, le théorème de Carathéodory [40, Thm 2.6, p. 24] implique que la fonction h s'étend continument à $\mathbb{T}$.

Soit $\phi_t(z) = h^{-1}(e^{-t}h(z))$. On observe que pour $0 < t < \ln 2$, $\phi_t(\mathbb{T})$ intersecte $\mathbb{T}$ sur un ensemble de mesure positive, et donc que C_{ϕ_t} n'est pas compact sur $H^2(\mathbb{D})$ d'après le corollaire 4.4. De plus, pour $t > \ln 2$, $\|\phi_t\|_\infty < 1$, et donc C_{ϕ_t} est compact par le corollaire 4.3.

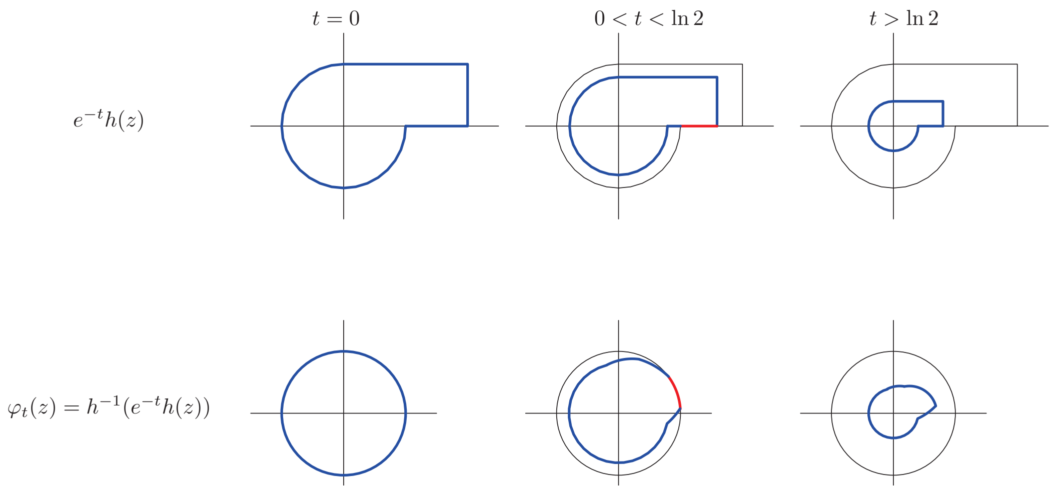


Figure 1.

4.3.2 Résolvante

Définition 4.17. Soit A un opérateur sur un espace de Hilbert H. Pour $\lambda \in \rho(A) := \mathbb{C}\backslash\sigma(A)$, on appelle *résolvante* (ou parfois λ-résolvante) de A l'opérateur $R(\lambda, A) := (\lambda \mathrm{I} - A)^{-1}$.

Si $(T(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un semigroupe dont A est le générateur, on appelle *queue de la résolvante* l'opérateur

$$R_{t_0}(\lambda) : x \mapsto \int_{t_0}^{\infty} e^{-\lambda t} T(t) x dt.$$

Un tel opérateur est bien défini, en particulier, pour tout λ tel que $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$ où $\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega t}$.

Proposition 4.18. *Soit T un semigroupe dont on note A le générateur. Soient $\lambda \in \rho(A)$ et $t \in \mathbb{R}_+$.*

$$R_{t_0}(\lambda) = R(\lambda, A)T(t_0) = T(t_0)R(\lambda, A).$$

En particulier, $R_0(\lambda) = R(\lambda, A)$.

Démonstration. Soit $h > 0$, on a pour tout $x \in H$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{T(h) - \mathrm{I}}{h}\right) R_{t_0}(\lambda)x &= \frac{1}{h}\int_{t_0}^{\infty} e^{-\lambda t}(T(t+h)x - T(t)x)dt \\ &= \frac{e^{h\lambda} - 1}{h}\int_{t_0}^{\infty} e^{-\lambda t}T(t)xdt - \frac{e^{h\lambda}}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} e^{-\lambda s}T(s)ds. \end{aligned}$$

Par passage à la limite lorsque $h \to 0$, on obtient :

$$AR_{t_0}(\lambda)x = \lambda R_{t_0}(\lambda)x - T(t_0)x.$$

D'où le résultat, sachant que les opérateurs $\lambda\,\mathrm{I} - A$ et $R_{t_0}(\lambda)$ commutent. □

Propriétés 4.19. Soient A et B deux opérateurs. Soient $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$ et $\mu \in \rho(A)$, alors :

1. première équation de la résolvante,

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A) \tag{4.3}$$

2. seconde équation de la résolvante,

$$R(\lambda, A) - R(\lambda, B) = R(\lambda, A)(A - B)R(\lambda, B). \tag{4.4}$$

Démonstration.

1. On a $(\mu - \lambda)\,\mathrm{I} = (\mu\,\mathrm{I} - A) - (\lambda\,\mathrm{I} - A)$.
   Puis on compose à droite par $R(\mu, A)$ et à gauche par $R(\lambda, A)$.
2. On a $A - B = (\lambda - B) - (\lambda - A)$.
   Puis on compose à droite par $R(\lambda, B)$ et à gauche par $R(\lambda, A)$.

□

Proposition 4.20. *Soit T un semigroupe. Si $T(t)$ est compact pour tout $t > t_0$ alors $T(t)$ est uniformément continu pour $t > t_0$.*

Démonstration. Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $s \in [0; 1]$, $\|T(s)\| \leqslant M$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $t > t_0$, on note

$$U_t = \{T(t)x, \|x\| \leqslant 1\}.$$

Cet ensemble est compact donc il existe $x_1, \ldots, x_n$ tels que l'ensemble U_t est recouvert par les boules ouvertes de centres $T(t)x_i$ et de rayon $\frac{\varepsilon}{2(M+1)}$. Par continuité des applications $t \mapsto T(t)x_i$, il existe $h_0 \in]0; 1]$ tel que pour tout $h \in [0; h_0]$ et tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$\|T(t+h)x_j - T(t)x_j\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $x \in H$, $\|x\| \leqslant 1$. Il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que

$$\|T(t)x_j - T(t)x\| < \frac{\varepsilon}{2(M+1)}.$$

Ainsi, pour tout $h \in [0; h_0]$,

$$\begin{aligned} \|T(t+h)x - T(t)x\| &\leqslant \|T(h)\|\|T(t)x - T(t)x_j\| \\ &\quad + \|T(t+h)x_j - T(t)x_j\| \\ &\quad + \|T(t)x_j - T(t)x\| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

On a ainsi montré que $T(t+h)$ tend uniformément vers $T(t)$ lorsque h tend vers 0^+ pour tout $t > t_0$. □

Nous pouvons maintenant énoncer un critère de compacité à partir d'un certain rang pour un semigroupe.

Théorème 4.21. *Soit T un semigroupe dont on note A le générateur. Le semigroupe T est compact pour $t > t_0$ si et seulement si T est uniformément continu pour $t > t_0$ et pour tout $\lambda \in \rho(A)$, l'opérateur $T(t_0)R(\lambda, A)$ est compact.*

Démonstration. Soient M, ω tels que $\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega t}$.

Si $T(t)$ est compact pour $t > t_0$, par la proposition 4.20, le semigroupe T est uniformément continu pour $t > t_0$. De plus, pour $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, la queue de la résolvante $R_{t_0}(\lambda)$ est bien définie pour la topologie uniforme. Soit $\varepsilon > 0$, les opérateurs $T(s)$ étant compacts pour $s > t_0$, on en déduit que $R_{t_0+\varepsilon}(\lambda)$ est compact. Puis,

$$\|R_{t_0}(\lambda) - R_{t_0+\varepsilon}(\lambda)\| = \|\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} e^{-\lambda s}T(s)ds\| \leqslant \varepsilon M e^{\omega(t_0+\varepsilon)} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

D'où $R_{t_0}(\lambda)$ est également compact. Enfin, on utilise la première égalité de la résolvante (4.3) qui donne pour tous $\mu, \lambda \in \rho(A)$

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A)$$

et donc

$$R_{t_0}(\lambda) - R_{t_0}(\mu) = (\mu - \lambda)R_{t_0}(\lambda)R_{t_0}(\mu).$$

On en conclut que pour tout $\mu \in \rho(A)$, $R_{t_0}(\mu)$ est compact.

On suppose maintenant que $R_{t_0}(\lambda)$ est compact pour tout $\lambda \in \rho(A)$ et T est uniformément continu pour $t > t_0$. Soit $\lambda \in]\omega, \infty[$. On a :

$$e^{\lambda t_0}\lambda R_{t_0}(\lambda)T(t) - T(t) = e^{\lambda t_0}\lambda \int_{t_0}^{\infty} e^{-\lambda s}(T(s+t) - T(t))ds.$$

Puis $\forall \delta > 0$,

$$\begin{aligned}
\|e^{\lambda t_0}\lambda R_{t_0}(\lambda)T(t) - T(t)\| &\leqslant \int_{t_0}^{t_0+\delta} \lambda e^{-\lambda(s-t_0)}\|(T(s+t)-T(t))\|ds \\
&\quad + \int_{t_0+\delta}^{\infty} \lambda e^{-\lambda(s-t_0)}\|(T(s+t)-T(t))\|ds \\
&\leqslant \sup_{t_0 \leqslant s \leqslant t_0+\delta} \|T(s+t)-T(t)\| + \int_{t_0+\delta}^{\infty} \lambda e^{-\lambda(s-t_0)} M(e^{\omega(t+s)} + e^{\omega t})ds \\
&\leqslant \sup_{t_0 \leqslant s \leqslant t_0+\delta} \|T(s+t)-T(t)\| + \frac{\lambda}{\lambda-\omega} M e^{\omega t + \omega t_0 + \omega\delta - \lambda\delta} + M e^{\omega t - \lambda\delta}.
\end{aligned}$$

D'où $\forall \delta > 0$,

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \|e^{\lambda t_0}\lambda R_{t_0}(\lambda)T(t) - T(t)\| \leqslant \sup_{t_0 \leqslant s \leqslant t_0+\delta} \|T(s+t)-T(t)\|.$$

L'inégalité précédente étant vraie pour tout $\delta > 0$, il vient,

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \|e^{\lambda t_0}\lambda R_{t_0}(\lambda)T(t) - T(t)\| = 0.$$

On déduit de la compacité de $e^{\lambda t_0}\lambda R_{t_0}(\lambda)T(t)$ pour tout $t > t_0$ que $T(t)$ est compact pour $t > 0$. □

4.4 Caractérisation de la compacité de la résolvante

Nous allons maintenant énoncer un résultat issu de [48] donnant un condition suffisante pour avoir la compacité de la résolvante d'un opérateur. Pour le montrer, nous avons besoin de deux résultats préliminaires que nous exposons maintenant.

Proposition 4.22. *Soient φ et ψ deux semiflots tels que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_t(0) = \psi_t(0) = 0$. On note respectivement G et L leurs générateurs, C_φ et C_ψ les semigroupes d'opérateurs de composition associés sur $H^2(\beta)$ avec β suite décroissante et A et B leurs générateurs. On suppose que la fonction $\frac{G}{L}$ est bornée sur $\mathbb{D}$. Soit $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$. Si l'opérateur $R(\lambda, A)$ est compact alors $R(\lambda, B)$ l'est aussi.*

Démonstration. Soit $f \in D(B)$, on a :

$$G(z)f'(z) = \underbrace{\frac{G(z)}{L(z)}}_{\in H^\infty(\mathbb{D})} \underbrace{L(z)f'(z)}_{\in H^2(\beta)} \in H^2(\beta),$$

et donc $D(B) \subset D(A)$. Puisque pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_t(0) = \psi_t(0) = 0$, on a $\|C_{\varphi_t}\| = \|C_{\psi_t}\| = 1$. On en déduit que $\mathbb{C}_+ \subset \rho(A) \cap \rho(B)$. Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}_+$, la seconde équation (4.4) de la résolvante donne

$$R(\lambda, A) - R(\lambda, B) = R(\lambda, A)(A - B)R(\lambda, B)$$

On en déduit que $R(\lambda, B)$ est compact. □

Proposition 4.23. *Soit* $0 < \beta < 2$. *Soit* φ *le semiflot donné pour tout* $z \in \mathbb{D}$ *par,*

$$\varphi_t(z) = h^{-1}(e^{-t}h(z)) \quad \text{où} \quad h(z) = z(1-z)^{-\beta}.$$

On note A *le générateur du semigroupe d'opérateurs de composition associé à ce semiflot. La résolvante de* A *n'est pas compact.*

Démonstration. Nous allons montrer que le spectre de A n'est pas dénombrable. On calcule le générateur G du semiflot φ, ce qui donne pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$G(z) = \frac{z(z-1)}{1-z+\beta z}.$$

Autrement dit, le générateur A du semigroupe $(C_{\varphi_t})_{t\in\mathbb{R}_+}$ est donné pour toute $f \in H^2(\mathbb{D})$ et tout $z \in \mathbb{D}$ par

$$Af(z) = \frac{z(z-1)}{1-z+\beta z}f'(z).$$

Pour $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$, on pose pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$P_{n,\lambda}(z) = \frac{1}{\lambda} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\binom{n+1}{k} - \beta\binom{n}{k-1}\right)\frac{z^k}{\lambda+k}$$

et

$$f_{n,\lambda}(z) = P_{n,\lambda}(1-z)^{\beta\lambda}.$$

On observe alors pour tout $z \in \mathbb{D}$, $(\lambda\,\mathrm{I} - A)f_{n,\lambda}(z) = (1-z)^{\beta\lambda+n+1}$. On considère l'ensemble $S_n = \{\lambda \in \mathbb{C}, P_{n,\lambda}(1) = 0\}$ et $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\backslash(-\mathbb{N})$. L'ensemble S est dénombrable. Soit $\lambda \in \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) \leqslant -\frac{1}{2\beta}\}\backslash S$. Le but est maintenant de montrer que $\lambda \notin \rho(A)$. On choisit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Re}(\lambda\beta+n+1) \geqslant -\frac{1}{2}$ de sorte que la fonction $z \mapsto (1-z)^{\lambda\beta+n+1} \in H^2(\mathbb{D})$. On suppose par l'absurde que $\lambda\,\mathrm{I}-A$ est inversible alors $R(\lambda, A)(1-z)^{\lambda\beta+n+1} = P_{n,\lambda}(z)(1-z)^{\beta\lambda} \in H^2(\mathbb{D})$ ce qui est en contradiction avec la définition de λ. On en déduit que le spectre de A contient un ensemble non dénombrable. Ainsi, l'opérateur A n'est pas compact et donc, pour tout $\lambda \in \rho(A)$, la résolvante $R(\lambda, A)$ n'est pas compacte. □

Proposition 4.24. *Soit* $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *un semiflot dont on note* G *le générateur. On suppose ici que pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_t(0) = 0$. *S'il existe* $\omega \in \mathbb{T}$ *tel que le quotient* $\frac{G(z)}{1-\omega z}$ *est borné sur* $\mathbb{D}$, *alors pour tout* $\lambda \in \rho(A)$, *la résolvante* $R(\lambda, A)$ *n'est pas compacte.*

Démonstration. On considère le semiflot donné par la proposition 4.23 avec $\beta = 1$. Il s'agit en fait du semiflot donné pour tout $z \in \mathbb{D}$ par

$$\chi_t(z) = \frac{e^{-t}z}{(e^{-t}-1)z+1}.$$

On considère maintenant le semiflot ψ donné pour tout $\forall z \in \mathbb{D}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, par $\psi_t(z) = \overline{\omega}\chi_t(\omega z)$. Son générateur est la fonction $L(z) = -z(1-\omega z)$. De plus, si B est le générateur de l'opérateur de composition associé à ψ, d'après la proposition 4.23, pour tout $\lambda \in \rho(B)$, $R(\lambda, B)$ est non compact. Le résultat s'en déduit alors de la proposition 4.22. □

Dans l'article [50], l'auteur énonce une caractérisation de la compacité de la résolvante, dans le cas où le point de Denjoy-Wolff est 0, selon laquelle le quotient $\left|\frac{G(z)}{z}\right|$ doit être non borné. Hélas, cette caractérisation est uniquement suffisante, comme on peut le remarquer avec l'exemple où $G(z) = -z$. Toutefois, en considérant les éléments majeurs du raisonnement énoncé, on peut trouver l'ensemble des arguments permettant d'obtenir la réciproque du résultat précédent. Par soucis de concision, nous nous proposons de ne présenter que les grandes lignes de la preuve.

Proposition 4.25. *Soit $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un semiflot dont on note G le générateur. On suppose ici que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_t(0) = 0$. Si pour tout $\omega \in \mathbb{T}$, le quotient $\frac{G(z)}{1-\omega z}$ est non borné sur $\mathbb{D}$, alors pour tout $\lambda \in \rho(A)$, la résolvante $R(\lambda, A)$ est compacte.*

Démonstration. Si le point de Denjoy-Wolff est 0, d'après la condition (2.2), le générateur du semiflot est de la forme $G(z) = -zF(z)$, avec $\operatorname{Re} f \geqslant 0$. On peut supposer que la fonction F ne s'annule pas et considérer la fonction $\frac{1}{F}$ de partie réelle positive et supposons également que $F(0) = 1$. Le théorème de représentation de Herglotz donne l'existence d'une mesure de probabilité μ sur le cercle unité telle que

$$\frac{1}{F(z)} = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(t).$$

Soit maintenant $\omega \in \mathbb{T}$, on décompose la mesure μ en $\mu = \mu(\{\omega\})\delta_\omega + \nu$ où la mesure ν est étrangère à la mesure de Dirac δ_ω. Ceci donne

$$\frac{1}{F(z)} = \mu(\{\omega\})\frac{\omega + z}{\omega - z} + \int_{\mathbb{T}} \frac{t + z}{t - z} d\nu(t),$$

et donc

$$\lim_{z\to\omega} -\frac{G(z)}{z(z-\omega)} = \lim_{z\to\omega} \frac{F(z)}{z-\omega} = -\frac{1}{2\omega\mu(\{\omega\})}.$$

Ainsi, si le quotient de l'énoncé est toujours non borné, cela signifie que la mesure μ ne charge pas les points du cercle.

On note maintenant h la fonction de Koenig donnée par le modèle (4.2), h est solution de l'équation

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{-c}{G(z)} = \frac{F(0)}{zF(z)} = \frac{1}{zF(z)}.$$

On en déduit, l'expression de h,

$$h(z) = z \exp\left(\int_0^z \frac{1}{\zeta}\left(\frac{1}{F(\zeta)} - 1\right) d\zeta\right).$$

En combinant cette expression avec celle de $\frac{1}{F}$, il vient

$$h(z) = z \exp\left(-2\int_0^{2\pi} \ln\left(1 - e^{-it}z\right) d\mu(t)\right).$$

Berkson et Porta ont montré [14, Thm 4.10] que la mesure μ précédente n'avait pas d'atome si et seulement si cette fonction h appartenait à tous les espaces $H^q(\mathbb{D})$ pour $q < \infty$. Enfin, il reste à montrer que $h \in \bigcap_{q<\infty} H^q(\mathbb{D})$ équivaut à la compacité de la résolvante, ceci est le résultat principal de l'article [5]. □

Ces deux dernières propositions se résument de la façon suivante :

Théorème 4.26. *Soit $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un semiflot de point de Denjoy-Wolff 0 et dont on note A le générateur du semigroupe d'opérateurs de composition associé. La résolvante $R(\lambda, A)$ est compacte sur $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si pour tout $\xi \in \mathbb{T}$*

$$\lim_{z\to\xi}\left|\frac{G(z)}{\xi - z}\right| = \infty.$$

Cette condition fait écho au théorème 4.7 dans le sens où chacun de ces résultats fait appel à la notion de dérivée angulaire. En effet, la condition précédente affirme que la variable z se rapproche de $\mathbb{T}$ toujours plus vite que $G(z)$ ne se rapproche de l'origine.

4.5 Le cas analytique

La première remarque qui rend le cas analytique digne d'intérêt est que les semigroupes holomorphes sont soit compacts, soit non compacts. Autrement dit, si un semigroupe holomorphe est finalement compact alors il est immédiatement compact. Cette remarque peut-être trouvée dans [39] où elle est attribuée à W.Arendt. La seconde remarque importante est que tous les semigroupes holomorphes sont uniformément continus. Ainsi, étudier leurs compacités revient exactement à étudier celle de la résolvante de leurs générateurs. Commençons par démontrer ces deux remarques.

Lemme 4.27. *Si un semigroupe holomorphe est finalement compact alors il est immédiatement compact.*

Démonstration. On considère la fonction quotient Q des applications linéaires continues $\mathcal{L}(H)$ sur un espace de Hilbert H à valeur dans l'algèbre de Calkin, c'est-à-dire le quotient de $\mathcal{L}(H)$ par l'ensemble des opérateurs compacts. Soit T un semigroupe. La famille $(QT(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un semigroupe holomorphe nul sur une demi-droite $[t_0, \infty[$. Ce semigroupe est donc nul pour tout t dans le secteur de définition de T par principe des zéros isolés. Le semigroupe T est donc compact. □

Ce fait découle également du résultat suivant.

Lemme 4.28. *Si un semigroupe est holomorphe, alors il est uniformément continu.*

Démonstration. Si un semigroupe T est holomorphe, alors pour tout $x \in H$, la fonction $t \mapsto T(t)x$ est différentiable. En particulier, pour tout $x \in H$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, $T(t)x \in D(A)$ avec $AT(t)x = \frac{\partial}{\partial t}T(t)x$ borné. On note $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in [0; 1]$, $\|T(t)\| \leqslant M$. Soit maintenant $t > 0$ et $0 < h < 1$, on a

$$T(t+h)x - T(t)x = \int_t^{t+h} AT(s)xds = \int_t^{t+h} T(s-t)AT(t)xds.$$

D'où

$$\|T(t+h)x - T(t)x\| \leqslant hM\|AT(t)\|\|x\|,$$

ce qui montre l'uniforme continuité. □

Théorème 4.29. *Soit G une fonction analytique et soit A un opérateur sur un domaine $D(A) \subset H^2(\mathbb{D})$, défini par $Af(z) = G(z)f'(z)$ et qui engendre un semigroupe holomorphe $(T(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ d'opérateurs de composition. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *le semigroupe $(T(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est immédiatement compact ;*
2. *le semigroupe $(T(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est finalement compact ;*
3. *il existe $\alpha \in \mathbb{D}$ tel que $G(\alpha) = 0$ et pour tout $\xi \in \mathbb{T}$,*

$$\lim_{z\to\xi} \left| \frac{G(z)}{z-\xi} \right| = \infty.$$

Démonstration. L'équivalence entre 1. et 2. est donné par le lemme 4.27.

Montrons que 1. implique 3. On suppose que $T(t) = C_{\varphi_t}$, où toutes les fonctions φ_t ont un point de Denjoy-Wolff commun $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$ et on suppose que le semigroupe $(T(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est immédiatement compact. D'après la proposition 4.10, on a $\alpha \in \mathbb{D}$. Pour utiliser le théorème 4.26, nous allons considérer un autre semigroupe dont le point de Denjoy-Wolff est 0. Pour cela, on considère l'automorphisme $\varphi_\alpha(z) := \frac{\alpha-z}{1-\overline{\alpha}z}$ et on note $\psi_t(z) := \varphi_\alpha \circ \varphi_t \circ \varphi_\alpha$. Puisque C_{φ_α} est inversible (égal à son inverse), et puisque $C_{\psi_t} = C_{\varphi_\alpha} C_{\varphi_t} C_{\varphi_\alpha}$, il est clair que le semigroupe $(T(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est immédiatement compact si et seulement si $(C_{\psi_t})_{t\in\mathbb{R}_+}$ l'est.

On note $\widetilde{G}$ (resp. G) le générateur du semiflot $(\psi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (resp. $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$). La condition (2.2) est satisfaite, c'est-à-dire on a $G(\alpha) = F(\alpha)(z-\alpha)(\overline{\alpha}-z) = 0$. De plus, sachant $\varphi_\alpha \circ \psi_t = \varphi_t \circ \varphi_\alpha$, on a

$$\frac{|\alpha|^2-1}{(1-\overline{\alpha}\psi_t(z))^2} \frac{\partial \psi_t}{\partial t}(z) = \frac{\partial \varphi_t}{\partial t}(\varphi_\alpha(z)).$$

Par passage à la limite lorsque t tend vers 0, on obtient :

$$\frac{|\alpha|^2-1}{(1-\overline{\alpha}z)^2} \widetilde{G}(z) = G(\varphi_\alpha(z)),$$

et donc

$$G(z) = \frac{|\alpha|^2-1}{(1-\overline{\alpha}\varphi_\alpha(z))^2} \widetilde{G}(\varphi_\alpha(z)).$$

Il vient alors

$$\frac{(1-|\alpha|^2)}{4} |\widetilde{G}(\varphi_\alpha(z))| \leqslant |G(z)| \leqslant \frac{(1+|\alpha|)}{(1-|\alpha|)} |\widetilde{G}(\varphi_\alpha(z))|,$$

et donc

$$\lim_{z\to\xi} \left| \frac{G(z)}{z-\xi} \right| = \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{z\to\xi} \left| \frac{\widetilde{G}(\varphi_\alpha(z))}{z-\xi} \right| = \infty.$$

On remarque que

$$\varphi_\alpha(z) - \varphi_\alpha(\xi) = (z-\xi) \frac{|\alpha|^2-1}{(1-\overline{\alpha}z)(1-\overline{\alpha}\xi)},$$

avec

$$\frac{1-|\alpha|}{1+|\alpha|} \leqslant \left| \frac{(1-\overline{\alpha}z)(1-\overline{\alpha}\xi)}{|\alpha|^2-1} \right| \leqslant \frac{4}{1-|\alpha|^2}.$$

Ainsi, on obtient

$$\lim_{z\to\xi}\left|\frac{G(z)}{z-\xi}\right| = \infty \iff \lim_{z\to\xi}\left|\frac{\widetilde{G}(\varphi_\alpha(z))}{\varphi_\alpha(z)-\varphi_\alpha(\xi)}\right| = \infty.$$

En utilisant le théorème 4.26 et puisque $\varphi_\alpha(\xi) \in \mathbb{T}$, on en déduit le résultat.

Pour montrer que 3. implique 1. on utilise la condition (2.2) grâce à laquelle on voit que l'existence d'un $\alpha \in \mathbb{D}$ tel que $G(\alpha) = 0$ implique que le point fixe de Denjoy–Wolff de toutes les fonctions φ_t est α. La conclusion découle d'un raisonnement analogue à celui qui vient d'être fait. □

Nous pouvons maintenant citer le résultat suivant :

Théorème 4.30. *Soit $(C_{\varphi_t})_{t\in\mathbb{R}_+}$ un semigroupe holomorphe et immédiatement compact sur $H^2(\mathbb{D})$ ou $\mathcal{D}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *il existe $t_0 > 0$ tel que $\|\varphi_{t_0}\|_\infty < 1$,*
2. *pour tout $t > 0$, on a $\|\varphi_t\|_\infty < 1$.*

Démonstration. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, le semiflot est de la forme (4.2). De plus, d'après le corollaire 3.7, ce modèle est encore valable pour $t \in \Sigma_\theta$.

En suivant la preuve du théorème 4.15, on choisit $t_1 > 0$ tel que $\|\varphi_{t_1}\|_\infty = 1$. Cela implique qu'il existe $\xi_1 \in \partial\Omega$ tel que $e^{-cu}\xi_1 \in \partial\Omega$ pour tout u dans le triangle $\Sigma_\alpha \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < t_1\}$ (cf. lemme 4.14). Ceci entre en contradiction avec le fait que les points de $\partial\Omega$ ne peuvent avoir de voisinage contenant uniquement des points de $\partial\Omega$. □

Les exemples suivants montrent que le fait d'être holomorphe est indépendant du fait d'être compact. Nous avons déjà vu, dans la section précédente un exemple de semigroupe finalement compact (et donc non holomorphe). L'exemple ci-dessous est celui d'un semigroupe immédiatement compact mais pas holomorphe.

Exemple. On considère la fonction

$$G(z) = \frac{2z}{z-1}.$$

L'image du cercle unité par $z \mapsto \overline{z}G(z)$ est la droite $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = -1\}$, et donc l'opérateur $A : f \mapsto Gf'$ engendre un semigroupe $(C_{\varphi_t})_{t\geqslant 0}$ d'opérateurs de composition non-holomorphe sur $H^2(\mathbb{D})$. D'autre part, on peut montrer que C_{φ_t} est compact pour tout $t > 0$. En effet, la fonction $f : z \mapsto ze^{-z}$, est vecteur propre de $A : f \mapsto Gf'$ de valeur propre -2. On a alors, pour tout $t > 0$, la fonction f est vecteur propre de C_{φ_t} de valeur propre e^{-2t}, c'est-à-dire,

$$\varphi_t(z)e^{-\varphi_t(z)} = e^{-2t}ze^{-z}.$$

En particulier, pour tout $z \in \mathbb{D}$ et $t > 0$, $|f(\varphi_t(z))| < |f(z)|$. On peut vérifier directement que la fonction f est injective sur le cercle $\mathbb{T}$ et que 0 est son unique zéro dans $\mathbb{D}$. Puis, $f(\mathbb{T})$ étant une courbe de Jordan, il vient par le principe de l'argument, pour tout $z_0 \in \mathbb{D}$,

$$1 = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{f'(z)}{f(z)-f(z_0)}dz = \frac{1}{2i\pi}\int_{f(\mathbb{T})} \frac{1}{w-z_0}dw,$$

et donc la fonction $z \mapsto ze^{-z}$ est injective sur $\overline{\mathbb{D}}$. Il s'en suit que $\|\varphi_t\|_\infty < 1$ pour tout $t > 0$, et donc C_{φ_t} est compact.

Exemple. Le semigroupe correspondant à $G(z) = (1 - z)^2$ est holomorphe mais non compact. En effet,

$$\phi_t(z) = \frac{(1-t)z + t}{-tz + 1 + t}$$

définit un semiflot de point de Denjoy–Wolff égal à 1, et donc le semigroupe ne peut pas être compact.

L'holomorphie découle du calcul de $\overline{z}G(z)$ pour $z = e^{i\theta}$. On obtient $-4\sin^2(\theta/2)$, qui est toujours réel et négatif.

Chapitre 5

Et si on changeait le domaine ?

L'ensemble des travaux précédents a été présenté dans le cas très particulier du disque unité ouvert $\mathbb{D}$. Mais la littérature regorge de cas d'étude sur d'autres domaines. Pour commencer, le résultat de Berkson et de Porta [14], présenté dans le théorème 1.15, s'énonce comme suit :

Théorème 5.1. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un semiflot de fonctions analytiques sur U. Il existe une fonction analytique $G : U \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $t \geqslant 0$ et tout $z \in U$,*

$$\frac{\partial\varphi(t,z)}{\partial t} = G(\varphi(t,z)). \tag{5.1}$$

Ainsi, il n'apparait pas nécessaire de se restreindre au cas du disque $\mathbb{D}$ et il est même tentant d'en changer. Toutefois, cela peut-être fait de plusieurs façons. La première consiste naïvement à se placer dès le départ sur un autre domaine et reprendre cette étude du début. On voit alors qu'il est nécessaire de bien s'y prendre puisque l'ensemble des propriétés des opérateurs de composition est alors considérablement modifié. À titre d'exemple, nous allons présenter le cas du demi-plan droit $\mathbb{C}_+$ tel qu'il l'est dans l'article [14], et nous essaierons de voir comment les résultats des chapitres précédents sont altérés. La seconde manière de changer de domaine consiste à « changer » le domaine au sens propre, c'est-à-dire à l'aide de l'application conforme j envoyant U sur $\mathbb{D}$, de considérer le semiflot des fonctions $\varphi_t = j^{-1}\circ\psi_t\circ j$ où $(\psi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un semiflot sur $\mathbb{D}$, puis transporter les propriétés de ce semiflot. Cette approche modifie encore plus l'étude de ces objets car l'image d'un opérateur de composition par une telle transformation est un opérateur de composition à poids. Nous allons ainsi présenter les opérateurs de composition à poids sur le disque et voir comment « transporter » ces résultats sur un autre domaine.

5.1 Le cas du demi-plan

5.1.1 Caractérisation du générateur du semiflot

Afin de pointer les différences qui surviennent lorsqu'on remplace le domaine $\mathbb{D}$ du semiflot par le demi-plan droit $\mathbb{C}_+$, nous allons commencer par regarder les caractérisations des générateurs de semiflots sur le domaine $\mathbb{C}_+$. Rappelons que nous avons vu trois caractérisations des générateurs de semiflots sur $\mathbb{D}$. La fonction analytique $G : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ engendre un semiflot si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

– Condition (2.1) : pour tout $z \in \mathbb{D}$,
$$2\operatorname{Re}(\overline{z}G(z)) + \left(1 - |z|^2\right)\operatorname{Re}(G'(z)) \leqslant 0.$$
– Condition (2.2) : pour tout $z \in \mathbb{D}$, il existe $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$ et $F : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction analytique vérifiant $\operatorname{Re} F \geqslant 0$ tels que
$$G(z) = F(z)(z - \alpha)(\overline{\alpha}z - 1).$$
– Condition (2.3) :
$$\operatorname*{ess\,sup}_{z\in\mathbb{T}} \operatorname{Re}(\overline{z}G(z)) \leqslant 0.$$

La condition (2.3) n'a pas, ou du moins pas encore, d'équivalent dans le cas du demi-plan droit. En ce qui concerne les deux autres, nous avons les résultats suivants, issus de l'article [14] :

Théorème 5.2. *Soit $G : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. On pose $u : (x, y) \mapsto \operatorname{Re} G(x+iy)$. La fonction G engendre un semiflot de fonctions analytiques sur $\mathbb{C}_+$ si et seulement si pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}_+$,*
$$x\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \leqslant u(x, y). \tag{5.2}$$

Cette condition (5.2) est l'analogue de la condition (2.1). En effet, dans les deux cas, on construit une solution à l'équation différentielle (5.1) sur un voisinage de l'origine. Les conditions (5.2) et (2.1) garantissent que ces solutions locales sont bien bornées sur tout ensemble borné et donc peuvent être prolongées jusqu'à donner des solutions maximales définies sur $\mathbb{R}_+$ tout entier.

L'analogue de la condition (2.2) est la suivante.

Théorème 5.3. *Soit $G : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. La fonction G engendre un semiflot de fonctions analytiques sur $\mathbb{C}_+$ si et seulement si pour tout $z \in \mathbb{C}_+$, il existe $\alpha \in \overline{\mathbb{C}_+}$ et $F : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction analytique vérifiant $\operatorname{Re} F \geqslant 0$ tels que la fonction G est de l'une des deux formes suivantes :*
$$G(z) = F(z),$$
ou
$$G(z) = F(z)(\alpha - z)(\overline{\alpha} + z).$$

La différence majeure dans cette caractérisation par rapport au cas du disque est que nous avons désormais deux formes possibles pour le générateur au lieu d'une seule. Cette différence vient de la nature de l'adhérence de $\mathbb{C}_+$. En effet, la formule $G(z) = F(z)(\alpha - z)(\overline{\alpha} + z)$ reste valable lorsque α est sur l'axe des imaginaires purs, mais lorsque $|\alpha|$ devient infini, c'est la formule $G(z) = F(z)$ qui doit prendre le relais.

5.1.2 Quasi-contraction sur l'espace de Hardy

Nous allons maintenant regarder le lien qu'il peut exister entre les semigroupes d'opérateurs de composition sur l'espace de Hardy du demi-plan et les semigroupes quasi-contractifs. Rappelons que ces semigroupes sont les mêmes dans le cas du disque, nous verrons que ce n'est plus le cas sur $\mathbb{C}_+$. Pour cela, commençons par donner la définition de l'espace de Hardy du demi-plan.

Définition 5.4. On dit qu'une fonction analytique $f : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}$ est dans l'*espace de Hardy du demi-plan* $H^2(\mathbb{C}_+)$ si

$$\|f\| := \sup_{x>0} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Nous considérons donc des semigroupes d'opérateurs de composition sur cet espace, associé à un semiflot de fonctions analytiques sur le demi-plan $\mathbb{C}_+$. Il est important de remarquer que sur cet espace, contrairement à $H^2(\mathbb{D})$, il existe des opérateurs de composition qui ne sont pas bornés. En effet, les auteurs de l'article [24] ont montré qu'un opérateur de composition de symbole φ était borné sur $H^2(\mathbb{C}_+)$ si et seulement si la limite non-tangentielle en l'infini

$$\varphi'(\infty) := \lim_{z\to\infty, z\in\Sigma_\theta} \frac{\varphi(z)}{z}$$

existe pour tout $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}[$ et est non nulle. On notera :

$$\angle \lim_{z\to\infty}$$

pour désigner la limite non-tangentielle. Dans ce cas, on a

$$\|C_\varphi\| = \varphi'(\infty)^{\frac{1}{2}}.$$

De plus, Arvanitidis [8] a utilisé les résultats de l'article [17] pour donner une condition nécessaire et suffisante pour que les opérateurs de composition issus d'un semigroupe soient bornés :

Théorème 5.5. *Soit A un opérateur donné par $Af = Gf'$ sur un domaine $D(A) \subset H^2(\mathbb{C}_+)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *l'opérateur A engendre un semigroupe quasi-contractif d'opérateurs de composition sur $H^2(\mathbb{C}_+)$;*
2. *la fonction G vérifie la condition* (5.2) *et la limite non-tangentielle $\angle \lim_{z\to\infty} \frac{G(z)}{z}$ existe.*

On peut noter que dans ce cas, notant $\delta = \angle \lim_{z\to\infty} \frac{G(z)}{z}$, on a $\|C_{\varphi_t}\| \leqslant e^{-\frac{\delta t}{2}}$. De plus, il est possible d'énoncer une condition nécessaire simple pour déterminer si un semigroupe d'opérateurs de composition est (quasi-)contractif ou non :

Théorème 5.6. *Soit A un opérateur donné par $Af = Gf'$ sur un domaine $D(A) \subset H^2(\mathbb{C}_+)$. Si l'opérateur A engendre un semigroupe quasi-contractif alors*

$$\inf_{z\in\mathbb{C}_+} \frac{\operatorname{Re} G(z)}{\operatorname{Re} z} > -\infty.$$

Si l'opérateur A engendre un semigroupe contractif alors

$$\inf_{z\in\mathbb{C}_+} \frac{\operatorname{Re} G(z)}{\operatorname{Re} z} \geqslant 0.$$

Démonstration. Pour $w \in \mathbb{C}_+$, on considère le noyau reproduisant k_w sur $H^2(\mathbb{C}_+)$ donné pour tout $z \in \mathbb{C}_+$ par

$$k_w(z) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{z+\overline{w}}.$$

On observe

$$\operatorname{Re}\frac{\langle Ak_w, k_w\rangle}{\langle k_w, k_w\rangle} = -\frac{\operatorname{Re} G(w)}{2\operatorname{Re} w}.$$

Le résultat découle alors immédiatement du théorème de Lumer-Phillips. □

5.1.3 Analyticité

Nous savons peu de chose sur l'holomorphie des semigroupes d'opérateurs de composition sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{C}_+)$. Mais nous pouvons tout de même énoncer la condition nécessaire suivante, qui nous permettra plus tard d'obtenir des exemples de semigroupes non analytiques.

Proposition 5.7. *Si l'opérateur $A : f \to Gf'$ engendre un semigroupe holomorphe sur $H^2(\mathbb{C}_+)$. Notant $G = u + iv$ où u et v sont des fonctions réelles et notant $z = x + iy$. Alors il existe $\alpha \in]0; \frac{\pi}{2}[$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$ et tout $\theta \in [-\alpha, \alpha]$, la fonction*

$$x \mapsto \frac{u(x,y)\cos\theta + v(x,y)\sin\theta}{x}$$

est décroissante.

Démonstration. Commençons par remarquer que la condition (5.2) peut se réécrire sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{x}\right) \leqslant 0.$$

Le résultat est alors immédiat en appliquant ceci aux fonctions $e^{-i\theta}G$ qui engendrent des semiflots. □

Exemple. Le semiflot des fonctions analytiques $\varphi_t : z \mapsto z + t$ permet de construire un exemple de semigroupe d'opérateurs de composition holomorphe d'angle $\frac{\pi}{2}$. Nous verrons dans une sous-section suivante des exemples de semigroupes d'opérateurs de composition non-holomorphes.

5.1.4 Compacité

La compacité n'a pas lieu d'être étudiée dans ce cas. En effet, il est connu (voir par exemple [24]) qu'aucun opérateur de composition n'est compact sur l'espace de Hardy du demi-plan. Ce fait a été redémontré pour les semigroupes dans l'article [8] dans lequel l'auteur montre que les semigroupes d'opérateurs de composition sur $H^2(\mathbb{C}_+)$ ne sont jamais uniformément continus et donc jamais compacts.

5.1.5 Groupes

Nous allons maintenant voir qu'il existe étonnamment peu de groupes d'opérateurs de composition sur l'espace de Hardy du demi-plan.

Proposition 5.8. *On suppose que l'opérateur $A : f \to Gf'$ engendre un groupe quasi-contractif d'opérateurs de composition (bornés) sur $H^2(\mathbb{C}_+)$. Alors il existe $p, q \in \mathbb{R}$, tels que $G(z) = pz + iq$. Dans ce cas le semiflot est donné pour tout $t \in \mathbb{R}$, et tout $z \in \mathbb{C}_+$, par*

$$\varphi_t(z) = ze^{pt} + \frac{iq}{p}\left(e^{pt} - 1\right), \qquad si\ p \neq 0, \tag{5.3}$$

et

$$\varphi_t(z) = z + iqt, \qquad si\ p = 0. \tag{5.4}$$

Démonstration. On part à nouveau de la condition (5.2) que l'on applique à G et à $-G$. On obtient alors,

$$x\frac{\partial u}{\partial x} = u.$$

La solution de cette équation est de la forme $u = F(y)x$ où F est une fonction à valeurs réelles. L'équation de Cauchy–Riemann implique que $\dfrac{\partial v}{\partial y} = F(y)$, et donc $v = \int F\, dy + E(x)$ où la fonction E est également à valeurs réelles. De même,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = F'(y)x = -E'(x),$$

et donc il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$, tels que $F(y) = ay + b$ et $E(x) = -\frac{ax^2}{2} + c$. On en déduit que $G(z) = -\frac{iaz^2}{2} + bz - ic$. Maintenant le théorème 5.5 implique que $a = 0$. D'où le résultat. □

Exemple. On pose pour tout $z \in \mathbb{C}_+$, la fonction $G : z \mapsto pz + iq$ où $p, q \in \mathbb{R}$ et $q \neq 0$. La fonction G engendre un groupe (non-holomorphe) d'opérateurs de composition.

De plus, en considérant sur $\mathbb{C}_+$, la fonction $G : z \mapsto 1 - z$ (de sorte que $\varphi_t(z) = e^{-t}z + 1 - e^{-t}$), on obtient un exemple de semigroupe qui n'est ni un groupe ni holomorphe.

Rappelons, pour finir, ce fait général : le seul groupe d'opérateurs de composition holomorphe est le semigroupe trivial.

5.2 Opérateurs de composition pondérés

Comme nous le verrons en détail plus loin, déformer le domaine vu par un opérateur de composition transforme ce dernier en un opérateur de composition à poids. Autrement dit, si j est une application conforme de $\mathbb{D}$ dans un domaine (non trivial) simplement connexe Ω, l'application j induit une isométrie J de $H^2(\mathbb{D})$ sur, en quelque sorte, l'espace $H^2(\Omega)$ (nous définirons plus loin ce « en quelque sorte »). Si maintenant C_φ est un opérateur de composition sur cet espace $H^2(\Omega)$, alors l'opérateur $T = J^{-1}C_\varphi J$ est un opérateur de composition à poids sur $H^2(\mathbb{D})$, c'est-à-dire qu'il existe deux fonctions analytiques $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ et $m : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ telles que pour tout $f \in H^2(\mathbb{D})$ et tout $z \in \mathbb{D}$,

$$Tf(z) = m(z)f(\psi(z)) =: C_{m,\psi}f(z).$$

Dans notre contexte, nous souhaitons considérer des semigroupes d'opérateurs de composition sur $H^2(\Omega)$, ce qui nous permet de construire une famille d'opérateurs de composition à poids sur l'espace de Hardy, mais pour que cette famille soit effectivement un semigroupe, la famille des poids doit vérifier de bonnes propriétés. Cette considération nous conduit donc à l'étude des cocycles.

5.2.1 Cocycles

Définition 5.9. Soit $\Phi = (\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un semiflot de fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$. Un *cocycle pour* Φ est une famille $(m_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ de fonctions analytiques de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{C}$, telle que

$$\begin{cases} & m_0 \equiv 1; \\ \forall s, t \in \mathbb{R}_+, & m_{s+t} = m_t \times m_s \circ \varphi_t; \\ \forall z \in \mathbb{D}, & t \mapsto m_t(z) \text{ est continue.} \end{cases}$$

Étant donnés deux familles de fonctions analytiques $\varphi_t : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ et $m_t : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ $(t \in \mathbb{R}_+)$, on définit pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ l'opérateur $T(t)$ pour toute $f \in H^2(\mathbb{D})$ et tout $z \in \mathbb{D}$ par

$$T(t)f(z) = C_{m_t,\varphi_t}f(z) := m_t(z)f(\varphi_t(z)).$$

On observe que l'opérateur T est un semigroupe si et seulement si la famille $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un semiflot et la famille $(m_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un cocycle pour $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Définition 5.10. Un cocycle $(m_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ pour un semiflot $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est appelé *cobord*[1] s'il existe une fonction analytique $w : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $z \in \mathbb{D}$,

$$m_t(z) = \frac{w(\varphi_t(z))}{w(z)}.$$

Dans la définition précédente, on exige implicitement que la fonction w ne s'annule (éventuellement) qu'au point de Denjoy-Wolff du semiflot $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, sans quoi les fonctions m_t pour t réel positif ne peuvent être analytiques sur $\mathbb{D}$. Les cobords joueront un rôle particulier pour nous, car comme nous le verrons, les cocycles qui apparaîtront lors de l'étude des semigroupes d'opérateurs de composition à poids seront des cobords. Dans l'article [32], l'auteur donne une caractérisation des cobords à l'aide d'une fonction g qui jouera en quelque sorte le rôle du générateur du cobord.

Théorème 5.11. *Soit $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un semiflot dont on note G le générateur. Soit $(m_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un cobord pour $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, on note w la fonction associée dans la définition 5.10. La fonction $g = \frac{Gw'}{w} : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ est analytique et vérifie pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, et tout $z \in \mathbb{D}$,*

$$m_t(z) = \exp\left(\int_0^t g(\varphi_s(z))ds\right).$$

Réciproquement, si la fonction G n'est pas la fonction nulle et si g est une fonction analytique, alors le cocycle pour $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ défini par $m_t(z) = \exp(\int_0^t g(\varphi_s(z))ds)$ est un cobord.

Démonstration. Voir [32] □

1. en anglais *coboundary*.

5.2.2 Espace de Hardy-Smirnoff

L'idée motivant l'étude des opérateurs de composition à poids sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ est de voir ceux-ci comme des opérateurs de composition (sans poids) sur un autre espace du même type. Ce sont ces espaces que nous allons décrire maintenant.

Définition 5.12. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine non trivial et simplement connexe. On note $j : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ l'application conforme envoyant $\mathbb{D}$ sur Ω. L'espace de *Hardy-Smirnoff* est l'ensemble

$$E^2(\Omega) := \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\Omega, \mathbb{C}), z \mapsto f(j(z))(j'(z))^{\frac{1}{2}} \in H^2(\mathbb{D}) \right\}.$$

Exemple. Pour $\Omega = \mathbb{C}_+$, la fonction j est donnée pour tout $z \in \mathbb{D}$ par $j(z) = \frac{1-z}{1+z}$. De plus, $j'(z) = -\frac{2}{(1+z)^2}$.

Si on note J la fonction qui à f associe $Jf : z \mapsto f(j(z))(j'(z))^{\frac{1}{2}}$, l'espace de Hardy-Smirnoff est muni de la norme $\|f\|_{E^2(\Omega)} = \|Jf\|_{H^2(\mathbb{D})}$ et la fonction J définit une isométrie de $E^2(\Omega)$ dans $H^2(\mathbb{D})$.

Si maintenant φ est une fonction analytique de Ω dans Ω induisant un opérateur de composition C_φ sur $E^2(\Omega)$, on pose $T = JC_\varphi J^{-1}$. Alors il existe deux fonctions analytiques $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ et $m : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ données par

$$\psi = j^{-1}\varphi j \quad \text{et} \quad m = \left(\frac{j}{j \circ \psi} \right)^{\frac{1}{2}}$$

telles que l'opérateur T est alors l'opérateur de composition à poids $C_{m,\psi}$ sur $H^2(\mathbb{D})$. Autrement dit, pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$Tf(z) = \left(\frac{j(z)}{j(\psi(z))} \right)^{\frac{1}{2}} f(\psi(z)).$$

On a alors les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\varphi} & \Omega \\ {\scriptstyle j}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle j} \\ \mathbb{D} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{D} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} E^2(\Omega) & \xrightarrow{C_\varphi} & E^2(\Omega) \\ {\scriptstyle J}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle J} \\ H^2(\mathbb{D}) & \xrightarrow{T} & H^2(\mathbb{D}). \end{array}$$

Si plutôt que de considérer une seule fonction analytique $\varphi : \Omega \to \Omega$, on considère un semiflot $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, on voit alors que les opérateurs $T(t)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$ ainsi construits forment un semigroupe d'opérateurs de composition à poids sur $H^2(\mathbb{D})$. En particulier, en conservant les notations $(\psi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ pour désigner le semiflot et $(m_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ pour désigner la famille des poids, on observe que $(m_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ forme un cobord pour $(\psi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. On notera G le générateur du semiflot et g le générateur du cobord, c'est-à-dire la fonction donnée par le théorème 5.11.

Dans l'article [47], l'auteur caractérise sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ les générateurs de semigroupes d'opérateurs de composition à poids dont le poids est un cobord. Dans notre cas, son résultat s'exprime à l'aide des notations précédentes de la façon suivante : le générateur A du semigroupe $(T(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est donné par

$$D(A) = \left\{ f \in H^2(\mathbb{D}), Gf' + gf \in H^2(\mathbb{D}) \right\}$$

et pour tout $f \in H^2(\mathbb{D})$ et tout $z \in \mathbb{D}$,

$$Af(z) = G(z)f'(z) + g(z)f(z) = G(z)f'(z) - \frac{j''(z)}{2j'(z)}G(z)f(z).$$

5.2.3 Caractérisation

Pour terminer, nous allons tenter une fois de plus d'énoncer une condition simple sur un opérateur permettant de déterminer s'il engendre ou non un semigroupe d'opérateurs de composition à poids. Au vu de ce qui précède, un tel opérateur doit être de la forme $Af = Gf' + gf$ où la fonction G tient le rôle du générateur du semiflot $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ par lequel on compose. Ainsi, la fonction G doit déjà vérifier les conditions évoquées lors de la partie 2. Il s'agit donc de trouver une condition sur la fonction g pour déterminer si elle engendre un cobord pour $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Cette condition nous est fournie par W.König [32], mais ne sera que suffisante. Nous n'avons pas de caractérisation nécessaire et suffisante à présenter.

Théorème 5.13. *Soit $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. Si*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \operatorname{Re} g(z) < \infty$$

alors pour tout semiflot $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, la fonction $m_t(z) = \exp\left(\int_0^t g(\varphi_s(z))ds\right)$ est un cobord pour $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Ainsi, si A est un opérateur de la forme $Af = Gf' + gf$, il engendre un semigroupe d'opérateurs de composition à poids dès que

$$\sup_{z\in\mathbb{T}} \operatorname{Re}(\overline{z}G(z)) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad \sup_{z\in\mathbb{D}} \operatorname{Re} g(z) < \infty.$$

De nombreuses questions restent en suspens. L'étude de la compacité ou de l'analyticité de tels semigroupes notamment reste à faire. Concernant la compacité, l'article [18] donne déjà une caractérisation à l'aide de mesure de Carleson des opérateurs de composition à poids qui sont compacts sur l'espace de Hardy. Concernant l'analyticité, rien à ma connaissance n'a été fait. Nous pouvons tout de même énoncer le résultat simple suivant qui affirme que si un semigroupe d'opérateurs de composition à poids admet une extension holomorphe alors celle-ci est constituée d'opérateurs de composition à poids.

Théorème 5.14. *Soit $T : H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ un opérateur linéaire borné. On suppose que $Te_0 \not\equiv 0$ et $Te_0 \in H^\infty(\mathbb{D})$. Alors, T est un opérateur de composition à poids si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(Te_0)^{n-1}Te_n = (Te_1)^n$.*

Démonstration. Si T est l'opérateur de composition à poids défini pour tout $f \in H^2(\mathbb{D})$ par $Tf = mf \circ \varphi$, alors il vient que $Te_0 = m$ et $Te_1 = m\varphi$. De plus, pour tout $n \geqslant 1$, on a bien $(Te_0)^{n-1}Te_n = (Te_1)^n$.

Réciproquement, on suppose que pour tout $n \geqslant 1$, $(Te_0)^{n-1}Te_n = (Te_1)^n$. Soit $m = Te_0 \in H^2(\mathbb{D})$. Puisque Te_0 n'est pas l'application nulle, l'ensemble Z de ses zéros est discret. Pour tout $z \in \mathbb{D}\backslash Z$, on pose $\varphi(z) = \frac{Te_1(z)}{Te_0(z)}$. Il reste à vérifier que $\varphi(\mathbb{D}\backslash Z) \subset \mathbb{D}$ pour tout $z \in \mathbb{D}\backslash Z$.

On suppose qu'il existe $z_0 \in \mathbb{D}\backslash Z$ tel que $|\varphi(z_0)| > 1$. Alors,

$$|m(z_0)||\varphi^n(z_0)| = |\langle Te_n, k_{z_0}\rangle| \leqslant \|T\|\|k_{z_0}\|,$$

ce qui contredit l'hypothèse $|\varphi^n(z_0)| \to \infty$.

On suppose maintenant qu'il existe $z_0 \in \mathbb{D}\backslash Z$ tel que $|\varphi(z_0)| = 1$. Par le principe du maximum, $\varphi(z) = \lambda \in \mathbb{T}$ pour tout $z \in \mathbb{D}\backslash Z$. D'où, $Te_n = \lambda^n m = \lambda^n Te_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, on obtient

$$\|T^* Te_0\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle Te_0, Te_n\rangle|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda|^{2n} = \infty,$$

ce qui est une contradiction. D'où, pour tout $z \in \mathbb{D}$, $|\varphi(z)| < 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Te_n = m\varphi^n$. Si $Te_0 \in H^\infty(\mathbb{D})$, alors la continuité de $f \mapsto mC_\varphi f$ implique que $T = (f \mapsto mC_\varphi f) = C_{m,\varphi}$. □

Corollaire 5.15. *Soit $(T(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ un semigroupe d'opérateurs de composition à poids sur $H^2(\mathbb{D})$. Si ce semigroupe admet une extension holomorphe sur un secteur angulaire Σ_θ, alors pour tout $\xi \in \Sigma_\theta$, l'opérateur $T(\xi)$ est un opérateur de composition à poids.*

Démonstration. Soit $n \geqslant 1$. On pose $f_n : \Sigma_\theta \to H^2(\mathbb{D})$ défini par

$$f_n(\xi) = (T(\xi)e_0)^{n-1} T(\xi)e_n - (T(\xi)e_1)^n.$$

Puisque $T(t)$ est un opérateur de composition à poids pour tout $t > 0$, la fonction f_n s'annule sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, l'analyticité de f_n sur Σ_θ implique que $f_n \equiv 0$.

Si $Te_0 \equiv 0$, alors $T(t)$ est trivial. Sinon, le semigroupe T étant holomorphe,

$$\sup_{\mathbb{D}\cap\Sigma_\theta} \|T(\xi)\| < +\infty.$$

Il vient alors que pour tout $\xi \in \mathbb{D} \cap \Sigma_\theta$, $\|T(\xi)e_0\| \leqslant M$, c'est-à-dire pour tout $\xi \in n\mathbb{D} \cap \Sigma_\theta$, $\|T(\xi)e_0\| \leqslant M^n$. Ainsi, pour tout $\xi \in \Sigma_\theta$, $T(\xi)e_0 \in H^\infty(\mathbb{D})$. La conclusion découle alors du théorème 5.14. □

Annexes

Annexe A

Théorème de Denjoy-Wolff

Le but de cette annexe est de montrer le théorème de Denjoy-Wolff.

Théorème A.1 (Denjoy-Wolff). *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique. On suppose que φ ne s'étend pas en un automorphisme elliptique du plan complexe. Alors il existe un point $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$ (appelé point de Denjoy-Wolff) tel que la suite des fonctions itérées (φ^n) converge localement uniformément vers α.*

Rappelons qu'un automorphisme du plan complexe admet toujours deux points fixes dont le produit est de module 1. Ainsi, on peut répertorier ces automorphismes en trois catégories :

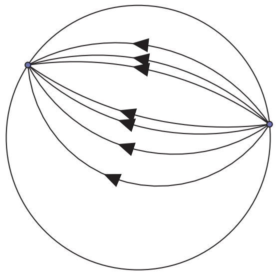
– On dit que φ est *elliptique* si l'un de ces deux points est dans le disque unité $\mathbb{D}$. Par convention, la fonction identité est supposée elliptique.
– On dit que φ est *hyperbolique* si les deux points fixes sont deux points distincts du cercle unité $\mathbb{T}$.
– On dit que φ est *parabolique* si φ admet un point fixe double, qui doit donc être un point du cercle unité $\mathbb{T}$.

On voit alors que, parmi les automorphismes, le cas elliptique est de loin le plus courant. Par nature, il faut donc interpréter le théorème de Denjoy-Wolff comme un théorème sur les fonctions analytiques qui ne sont pas des automorphismes, mais dont le résultat reste vrai dans le cas particulier des automorphismes hyperboliques ou paraboliques. Commençons par traiter ces cas.

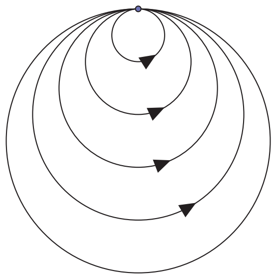
– On suppose que φ est un automorphisme hyperbolique. On considère l'homographie h_1 qui envoie le disque unité $\mathbb{D}$ sur le demi-plan supérieur $\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z > 0\}$ et qui envoie l'un des points fixes sur 0, l'autre en l'infini. Si on note

$$h_1 \circ \varphi \circ h_1^{-1}(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

ces conditions imposent $b = c = 0$ et $\frac{a}{d} \neq 1$ car h_1 n'est pas la fonction identité. Ainsi, $h_1 \circ \varphi \circ h_1^{-1}$ est une homothétie et le théorème est vérifié.



– On suppose que φ est un automorphisme parabolique. On note h_2 l'homographie qui envoie le disque unité $\mathbb{D}$ sur le demi plan supérieur $\mathbb{H}_+$ et qui envoie l'unique point fixe de φ en l'infini. Notant
$$h_2 \circ \varphi \circ h_2^{-1}(z) = \frac{ez+f}{gz+h},$$
il vient $g = 0$ et $\frac{e}{h} = 1$. Ainsi $h_2 \circ \varphi \circ h_2^{-1}$ est une translation et le théorème est vérifié.



Nous allons introduire une nouvelle métrique, appelée *métrique pseudo-hyperbolique*, qui s'avèrera plus pertinente que la métrique euclidienne usuelle dans le cadre des fonctions analytiques sur le disque unité.

Définition A.2. On note ρ la métrique, dite pseudo-hyperbolique, sur $\mathbb{D}$ donnée pour tout $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{D}$, par
$$\rho(\zeta_1, \zeta_2) = \left| \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{1 - \overline{\zeta_1}\zeta_2} \right|.$$

Cette métrique possède plusieurs propriétés remarquables. Tout d'abord, les cercles pour cette métrique sont des cercles euclidiens. En effet, en fixant ζ_1, la fonction $\zeta_2 \mapsto \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{1 - \overline{\zeta_1}\zeta_2}$ est une homographie, donc conserve les cercles-droites, et est un automorphisme du disque, donc ne peut envoyer un cercle euclidien que sur un autre cercle du disque. Autre propriété intéressante, le théorème suivant affirme que les fonctions analytiques sont toutes des contractions pour cette métrique. Le terme de contraction est, ici, à prendre au sens large : les automorphismes sont des isométries, les autres fonctions analytiques sont des contractions strictes.

Théorème A.3 (Schwarz-Pick)**.** *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique. Pour tous $z, w \in \mathbb{D}$, on a*
$$\rho(\varphi(z), \varphi(w)) \leqslant \rho(z, w).$$

De plus, il y a égalité pour un couple $(z,w) \in \mathbb{D}^2$ avec $z \neq w$ si et seulement s'il y a égalité pour tous $z, w \in \mathbb{D}$, et si et seulement si φ est un automorphisme.

Démonstration. On fixe $w \in \mathbb{D}$ et $u = \varphi(w)$. On note $\psi_u : z \mapsto \frac{u-z}{1-\overline{u}z}$ et $\psi_w : z \mapsto \frac{w-z}{1-\overline{w}z}$. Ces deux fonctions sont des automorphismes du disque unité. On pose

$$\forall z \in \mathbb{D}, \quad \widetilde{\psi}(z) = \left(\frac{\psi_u \circ \varphi}{\psi_w}\right)(z).$$

La fonction $\widetilde{\psi}$ est une fonction analytique de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$. En effet, la fonction ψ_w admet un unique zéro, qui est simple, en $z = w$. Ce point s'avère être également un point d'annulation de $\psi_u \circ \varphi$. De plus, pour tout $z \in \mathbb{T}$, $|\psi_w(z)| = 1$ et $\psi_u(\varphi(\mathbb{D})) \subset \mathbb{D}$. Ainsi, par principe du maximum, $\|\widetilde{\psi}\|_\infty \leqslant 1$, ce qui est le résultat souhaité. En outre, s'il existe $z \in \mathbb{D}$ (éventuellement $z = w$) tel que $\|\widetilde{\psi}\|_\infty = 1$, toujours par principe du maximum, $\widetilde{\psi}$ est une fonction constante unimodulaire et donc φ est un automorphisme. $\square$

En réalité, nous avons montré que les fonctions $\widetilde{\psi}_w$ définies par

$$\widetilde{\psi}_w(z) = \frac{\rho(\varphi(z), \varphi(w))}{\rho(z,w)}$$

sont bien définies partout sur le disque unité ouvert $\mathbb{D}$, y compris lorsque $z = w$, de module inférieur à 1. De plus, l'inégalité est stricte à l'intérieur du disque si et seulement si φ n'est pas un automorphisme. Une dernière remarque est que l'inégalité de Schwarz-Pick peut se réécrire, pour toute application analytique $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ et tous $z, w \in \mathbb{D}$,

$$\left|\frac{\varphi(z) - \varphi(w)}{z - w}\right| \leqslant \left|\frac{1 - \overline{\varphi(z)}\varphi(w)}{1 - \overline{z}w}\right| \quad \text{et donc} \quad |\varphi'(z)| \leqslant \frac{1 - |\varphi(z)|^2}{1 - |z|^2}.$$

Lemme A.4. *Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique. On suppose que f n'est pas un automorphisme. Alors seulement deux cas sont possibles :*
- $\forall z \in \mathbb{D}, |f^n(z)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1,$
- $\exists \alpha \in \mathbb{D}, \forall z \in \mathbb{D}, f^n(z) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha.$

En outre, dans le second cas, la convergence est localement uniforme.

Démonstration. On suppose que pour tout $z \in \mathbb{D}$ et pour tout compact $K \subset\subset \mathbb{D}$, la suite des itérés $f^n(z)$ ne rencontre qu'un nombre fini de fois le compact K c'est-à-dire $\forall z \in \mathbb{D}$, $\forall K \subset\subset \mathbb{D}$, $\#\{n \in \mathbb{N}, f^n(z) \in K\} < \infty$. Dans ce cas, on a pour tout $z \in \mathbb{D}$, $|f^n(z)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

On suppose maintenant, $\exists z \in \mathbb{D}$, $\exists K \subset\subset \mathbb{D}$, $\#\{n \in \mathbb{N}, f^n(z) \in K\} = \infty$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = f^n(z)$, la suite des itérés de z. Puisque f n'est pas un automorphisme, on a, d'après le théorème de Schwarz-Pick, que $\forall u, v \in \mathbb{D}$,

$$\frac{\rho(f(u), f(v))}{\rho(u,v)} < 1.$$

Ainsi, l'application

$$(u,v) \mapsto \frac{\rho(f(u), f(v))}{\rho(u,v)}$$

est continue. Notant $L = K \cup f(K)$, il existe $c < 1$ tel que $\forall u, v \in L$, $\rho(f(u), f(v)) < c\rho(u, v)$. On remarque alors que, dès que $z_m \in K$, on a

$$\rho(z_{m+2}, z_{m+1}) < c\rho(z_{m+1}, z_m).$$

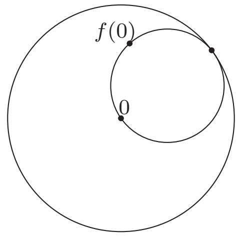
On en déduit que

$$\rho(z_{n+1}, z_n) < c^{N_n}\rho(z_1, z_0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

où $N_n = \#\{k \in [\![0; n]\!], z_k \in K\}$. On en déduit que la suite (z_n) est de Cauchy, on note $\alpha \in K$ sa limite. D'après le théorème de Montel, la suite de fonctions (f^n) converge localement uniformément vers une fonction holomorphe g. Il reste à montrer que $g \equiv \alpha$. Soit D un disque compact de $\mathbb{D}$ centré en α. Il existe $\tilde{c} \in]0; 1[$ tel que pour tout $w \in D$, $\rho(f(w), \alpha) < \tilde{c}\rho(w, \alpha)$. Ainsi α est un point attractif et $\forall w \in D$, $g(w) \equiv \alpha$, et donc $g \equiv \alpha$ par principe des zéros isolés. □

Le lemme précédent nous fournit l'ingrédient essentiel de la preuve du théorème de Denjoy-Wolff. En clair, le résultat attendu a été montré lorsque le point de Denjoy-Wolff est un point du disque unité. Dans le cas contraire, nous avons seulement montré que la suite des itérés « tend vers le cercle unité », il nous faut alors montrer que cette suite admet une limite, puis que la convergence est localement uniforme. L'idée finale consiste à contracter l'image de notre fonction pour nous ramener au cas du lemme précédent.

Démonstration. (du théorème de Denjoy-Wolff) On suppose que φ n'est pas un automorphisme, ce cas ayant déjà été traité. D'après le lemme, il y a deux cas : s'il existe $\alpha \in \mathbb{D}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{D}$, $f^n(z) \to \alpha$ alors α est le point fixe souhaité ; sinon, pour tout $z \in \mathbb{D}$, $|f^n(z)| \to 1$. On se place dans ce second cas. Pour $\varepsilon > 0$, on note $f_\varepsilon(z) = (1 - \varepsilon)f(z)$. La fonction f_ε est à valeur dans un compact de $\mathbb{D}$, le lemme nous fournit un point fixe $z_\varepsilon \in \mathbb{D}$ pour f_ε. On note D_ε le disque pour la mesure pseudo-hyperbolique centré en z_ε de rayon $|z_\varepsilon|$. Ce disque est inclus dans le disque unité, $0 \in \partial D_\varepsilon$ et puisque z_ε est un point fixe de f_ε, le théorème de Schwarz-Pick nous donne l'inclusion $f_\varepsilon(D_\varepsilon) \subset D_\varepsilon$ et $(1 - \varepsilon)f(0) \in \partial D_\varepsilon$. Les points 0 et $f(0)$ doivent être différents car sinon la suite des itérés $(f^n(0))$ ne tendrait pas vers 1 en module. On note D_1 et D_2 les deux disques admettant 0 et $f(0)$ dans leurs frontières et tangents à $\mathbb{T}$. On note z_1 (respectivement z_2) l'unique point de $\mathbb{T} \cap \overline{D_1}$ (resp. $\mathbb{T} \cap \overline{D_2}$). En faisant tendre ε vers 0, le complexe z_ε converge vers l'un des complexes z_1 ou z_2, on supposera quitte à renommer ces points que $z_\varepsilon \to z_1$. Ainsi, le disque D_ε tend vers le disque $D_1 \subset \mathbb{D}$. Or, pour $z_0 \in \mathbb{D}$, les points d'accumulation de la suite $(f^n(z_0))_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans $\mathbb{T} \cap \overline{D}_1 = \{z_1\}$. Le point z_1 est alors le point de Denjoy-Wolff recherché.



□

Annexe B

Théorème de Carathéodory-Toeplitz

Dans le chapitre 2, nous avons exhibé trois conditions sur la fonction $G \in \mathcal{H}\mathrm{ol}(\mathbb{D})$ pour qu'elle génère un semiflot de fonctions analytiques. La plus concise de ces conditions, la condition (2.3), peut sembler difficile à vérifier. Aussi, il nous a semblé judicieux de parler du théorème de Carathéodory-Toeplitz qui donne une caractérisation des fonctions envoyant le disque unité dans le demi-plan droit. Ce théorème montre que la condition (2.3) s'exprime directement en terme de définie positivité de matrices dont les coefficients sont ceux de la fonctions G.

Théorème B.1 (Carathéodory-Toeplitz)**.** *Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n z^n$. On note pour $k \geqslant 1$ les matrices $M_k = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant k}$ où $m_{i,j} = \mu_{j-i}$ si $i \leqslant j$ et $m_{i,j} = 0$ sinon. Alors f envoie le disque unité sur le demi-plan droit si et seulement si les matrices hermitiennes $N_k = M_k + \overline{M_k'}$ sont définies positives pour tout $k \geqslant 1$.*

Ce théorème est une conséquence de l'algorithme de Schur :

Théorème B.2. *On note*

$$\mathcal{S} = \{f \in H^\infty(\mathbb{D}), f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}\}$$

la boule unité de $H^\infty(\mathbb{D})$ appellée classe de Schur *et*

$$E = \{(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{\mathbb{D}}^{\mathbb{N}},\ |\gamma_i| = 1 \Rightarrow \forall j > i, \gamma_j = 0\}.$$

Étant donnée une fonction holomorphe F, on considère la suite de fonction $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la suite de complexes $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$F_0 = F,\ \gamma_n = F_n(0),\ F_{n+1}(z) = \frac{F_n(z) - \gamma_n}{z(1 - \overline{\gamma_n} F_n(z))}.$$

L'application qui à la fonction F associe la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite est une bijection de $\mathcal{S}$ dans E. De plus, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $|\gamma_i| = 1$ si et seulement si la fonction F est un produit de Blaschke fini.

Démonstration. On commence par remarquer que, d'après le lemme de Schwarz-Pick, si $F_n \in \mathcal{S}$ alors $F_{n+1}(\mathbb{T}) \subset \mathbb{D}$. De plus puisque z divise $F_n - \gamma_n$, la fonction F_{n+1} est analytique, par principe du maximum, on en déduit que $F_{n+1}(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ et donc que $F_{n+1} \in \mathcal{S}$. Ainsi, si $F \in \mathcal{S}$

alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|\gamma_n| \leqslant 1$. De plus, par principe du maximum, s'il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $|\gamma_i| = 1$ alors $F_i \equiv \gamma_i$ et donc pour tout $j > i, \gamma_j = 0$.

En outre, on remarque que

$$F_n(z) = \frac{zF_{n+1}(z) + \gamma_n}{1 + z\overline{\gamma_n}F_{n+1}(z)}.$$

Puisqu'un produit de Blaschke de degré m s'écrit sous la forme $\frac{\lambda P^t(z)}{P(z)}$ où P est un polynôme de degré m, $P^t(z) = z^m P(\frac{1}{z})$ et $\lambda \in \mathbb{T}$. On en déduit que si F_{n+1} est un produit de Balschke de degré m alors F_n est un produit de Blaschke de degré $m+1$. Il vient alors que s'il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $|\gamma_i| = 1$ alors F est un produit de Blaschke de degré i.

On suppose maintenant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\gamma_n| < 1$. Par ce qui précède, il existe deux suites de polynômes $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\deg A_n = \deg B_n = n$ tels que

$$F(z) = \frac{zB_n^t(z)F_{n+1}(z) + A_n(z)}{B_n(z) + zA_n^t(z)F_{n+1}(z)}.$$

Ces polynômes sont définis par :

$$A_0 \equiv \gamma_0, \quad A_{n+1}(z) = A_n(z) + z\gamma_{n+1}B_n^t(z),$$

$$B_0 \equiv 1, \quad B_{n+1}(z) = B_n(z) + z\gamma_{n+1}A_n^t(z).$$

ou, d'un point de vue matriciel :

$$\begin{pmatrix} B_{n+1}(z) & A_{n+1}(z) \\ A_{n+1}^t(z) & B_{n+1}^t(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z\gamma_{n+1} \\ \overline{\gamma_{n+1}} & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_n(z) & A_n(z) \\ A_n^t(z) & B_n^t(z) \end{pmatrix}. \tag{B.1}$$

Montrons que B_n ne s'annule pas dans $\mathbb{D}$. En effet,

$$\begin{pmatrix} 1 & z\gamma_n \\ \overline{\gamma_n} & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z\gamma_n \\ \overline{\gamma_n} & z \end{pmatrix}^* \leqslant (1 - |\gamma_n|^2) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans le sens où la différence de ces deux matrices est une matrice positive. Il vient,

$$\begin{pmatrix} B_n(z) & A_n(z) \\ A_n^t(z) & B_n^t(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_n(z) & A_n(z) \\ A_n^t(z) & B_n^t(z) \end{pmatrix}^* \leqslant \prod_{k=0}^{n} (1 - |\gamma_k|^2) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où, en regardant le coefficient $(1,1)$ de ces matrices,

$$|B_n(z)|^2 - |A_n(z)|^2 \geqslant \prod_{k=0}^{n} (1 - |\gamma_k|^2) > 0.$$

On peut également déduire de cette relation que $\frac{A_n}{B_n} \in \mathcal{S}$.

D'autre part, par un calcul de déterminant dans l'équation (B.1), on a

$$B_n(z)B_n^t(z) - A_n(z)A_n^t(z) = z^n \prod_{k=0}^{n} (1 - |\gamma_k|^2).$$

Il vient enfin que

$$F(z) - \frac{A_n(z)}{B_n(z)} = z^{n+1} \prod_{k=0}^{n} (1 - |\gamma_k|^2) \frac{F_{n+1}(z)}{B_n(z)(B_n(z) - zA_n^t(z)F_{n+1}(z))}.$$

Ainsi, $F - \frac{A_n}{B_n}$ admet 0 comme zéro de multiplicité $(n+1)$, on note g la fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ telle que $\frac{1}{2}\left(F(z) - \frac{A_n(z)}{B_n(z)}\right) = z^{n+1}g(z)$. On remarque que pour tout $z \in \mathbb{T}$, on a $|g(z)| = \left|\frac{1}{2}\left(F(z) - \frac{A_n(z)}{B_n(z)}\right)\right| \leqslant 1$ donc, par principe du maximum, pour tout $z \in \mathbb{D}$, $|g(z)| \leqslant 1$. Il vient, $\left|\frac{1}{2}\left(F(z) - \frac{A_n(z)}{B_n(z)}\right)\right| \leqslant |z|^{n+1}$ sur $\mathbb{D}$. Ainsi, la suite de fonction $(\frac{A_n}{B_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge localement uniformément vers F. On a montré que la suite des coefficients $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ caractérisait la fonction F. $\square$

Corollaire B.3. *Étant donnée une famille de nombres complexes $\{c_k, k = 0, \ldots, n\}$, il existe une fonction $F \in \mathcal{S}$ dont les $n+1$ premiers coefficients de Taylor sont les coefficients $\{c_k\}$ si et seulement si la matrice*

$$T_n = \begin{pmatrix} c_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ c_1 & c_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & \ldots & c_0 \end{pmatrix}$$

définit une contraction.

Démonstration. Si une telle fonction F existe, la matrice T_n est la matrice de la restriction au sous-espace engendré par les vecteurs $(e_0, \ldots, e_n)$ de l'opérateur de Toeplitz de symbole F. La fonction F étant dans la classe de Schur, T_n est une matrice de contraction.

On montre la réciproque par récurrence sur n. Le cas $n = 0$ est immédiat en posant $F \equiv c_0$. On suppose maintenant la propriété vraie aux rangs $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Sans perte de généralité, on suppose $|c_0| < 1$ et on pose

$$T'_n = (T_n - c_0 I_{n+1})(I_{n+1} - \overline{c_0} T_n)^{-1}.$$

On remarque alors que

$$I - T'^*_n T'_n = (1 - |c_0|^2)(I_{n+1} - c_0 T_n^*)^{-1}(I - T_n^* T_n)(I_{n+1} - \overline{c_0} T_n)^{-1},$$

donc T'_n est une contraction. Or, la matrice T'_n est de la forme

$$T'_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ c'_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ c'_1 & c'_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ c'_{n-1} & c'_{n-2} & c'_{n-3} & \ldots & c'_0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, la matrice

$$\begin{pmatrix} c'_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ c'_1 & c'_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ c'_{n-1} & c'_{n-2} & c'_{n-3} & \ldots & c'_0 \end{pmatrix}$$

est également une matrice de contraction. Par hypothèse de récurrence, il existe une fonction $F' \in \mathcal{S}$ dont les n premiers coefficients de Taylor sont les nombres $c'_0, \ldots, c'_{n-1}$. On pose alors

$$F(z) = \frac{c_0 + zF'(z)}{1 + z\overline{c_0}F'(z)} \in \mathcal{S}.$$

Il reste à montrer que F convient.

Étant donné une fonction analytique $G(z) = d_0 + d_1 z + d_2 z^2 + \ldots$, on note

$$T_n(G) = \begin{pmatrix} d_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ d_1 & d_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ d_n & d_{n-1} & d_{n-2} & \ldots & d_0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que, pour tout $\mu, \nu \in \mathbb{C}$, et pour tout $G, H \in \mathcal{H}\mathrm{ol}(\mathbb{D})$,

$$T_n(\mu G + \nu H) = \mu T_n(G) + \nu T_n(H),$$

$$T_n(GH) = T_n(G)T_n(H).$$

Au vu de ces propriétés, on a

$$\begin{aligned} T_n(F) &= (c_0 I_{n+1} + T_n(zF'))(I_{n+1} + \overline{c_0}T_n(zF'))^{-1} \\ &= (c_0 I_{n+1} + T'_n)(I_{n+1} + \overline{c_0}T'_n)^{-1} \\ &= T_n. \end{aligned}$$

Ce qui conclut la récurrence. □

On peut alors montrer le théorème B.1 de Carathéodory-Toeplitz.

Démonstration. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n z^n$, on note

$$F(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z(f(z) + f(0))}$$

On a que f envoie le disque sur le demi-plan droit si et seulement si $F \in \mathcal{S}$.

On note $F(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$. Les coefficients $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont donnés par les relations :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= c_0 2\mu_0 \\ &\vdots \\ \mu_n &= 2\mu_0 c_{n-1} + \mu_1 c_{n-2} + \mu_2 c_{n-3} + \cdots + \mu_{n-1} c_0. \end{aligned}$$

Ainsi, fixer les $n+1$ premiers coefficients de Taylor de f équivaut à fixer les n premiers coefficients de Taylor de F.

Avec les notations de la preuve précédente, on a :

$$N_n = T_n(f) + T_n^*(f),$$

et

$$T_n\left(\frac{f}{f(0)}\right) = (I - T_n(zF))(I + T_n(zF))^{-1},$$

$$T_n\left(\frac{f}{f(0)}\right) + T_n^*\left(\frac{f}{f(0)}\right) = 2(I + T_n^*(zF))^{-1}(I - T_n^*(zF)T_n(zF))(I + T_n(zF))^{-1}$$

Ainsi, la matrice N_n est définie positive si et seulement si la matrice $T_n(F)$ est une matrice de contraction. □

Ce théorème prend encore plus de sens lorsqu'on lui ajoute le critère de Sylvester

Théorème B.4 (Critère de Sylvester)**.** *Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ hermitienne. Alors A est définie positive si et seulement si les n matrices $A_p = \left(a_{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ avec $1 \leqslant p \leqslant n$ sont de déterminants strictement positifs.*

Démonstration. Nous allons montrer l'équivalence des conditions suivantes :

1. Les n matrices A_p avec $1 \leqslant p \leqslant n$ sont de déterminants strictement positifs ;
2. il existe une matrice P avec ${}^tPAP = I$;
3. la matrice A est définie positive.

(1) ⇒ (2) On montre le résultat par récurrence sur la taille de A. Le cas $p = 1$ est immédiat. On suppose la propriété vraie au rang $p \geqslant 1$. On note P_p convenant pour la matrice A_p et on remarque que $\det(P_p)^2 \det(A_p) = 1$ donc $\det(P_p) \neq 0$. On en déduit l'existence de coefficient $b_1, \dots, b_{p+1}$ tels que

$$\begin{pmatrix} {}^tP_p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A_{p+1} \begin{pmatrix} P_p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & b_1 \\ & I_p & & \vdots \\ & & & b_p \\ b_1 & \cdots & b_p & b_{p+1} \end{pmatrix}.$$

On en déduit l'égalité suivante sur les déterminants

$$\delta^2 := \det(P_p)^2 \det(A_{p+1}) = b_{p+1} - \sum_{1\leqslant j\leqslant p} b_j^2 > 0.$$

On pose alors

$$P_{p+1} = \begin{pmatrix} P_p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & -\frac{1}{\delta}b_1 \\ & I_p & & \vdots \\ & & & -\frac{1}{\delta}b_p \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\delta} \end{pmatrix}.$$

On vérifie l'égalité ${}^tP_{p+1}A_{p+1}P_{p+1} = I$.

(2) ⇒ (3) Comme ${}^tPAP = I$, on a $\det(P) \neq 0$. Pour $Y \neq 0$, il existe un unique X non nul, avec $PX = Y$, donc ${}^tYAY ={}^t (PX)A(PX) = \|X\|^2 > 0$.

(3) $\Rightarrow$ (1) On montre le résultat par récurrence sur la taille de A. Le cas $p = 1$ est immédiat. On suppose la propriété vraie au rang $p \geqslant 1$. On sait déjà (1) $\Rightarrow$ (2) donc on a l'existence d'une matrice inversible P_p telle que ${}^tP_pA_pP_p = I_p$. Avec les notations précédentes, on en déduit que $\det A_{p+1}$ est du signe de

$$b_{p+1} - \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} b_j^2.$$

On calcule :

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} -b_1 & \cdots & -b_p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tP_p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A_{p+1} \begin{pmatrix} P_p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b_1 \\ \vdots \\ -b_p \\ 1 \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} -b_1 & \cdots & -b_p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & b_1 \\ & I_p & & \vdots \\ & & & b_p \\ b_1 & \cdots & b_p & b_{p+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b_1 \\ \vdots \\ -b_p \\ 1 \end{pmatrix} \\
= & \; b_{p+1} - \textstyle\sum_{1 \leqslant j \leqslant p} b_j^2.
\end{aligned}$$

On a montré qu'il existe X non nul tel que

$$b_{p+1} - \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} b_j^2 =^t XA_pX > 0.$$

D'où le résultat attendu.

□

Exemple. Soit $G(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 \in \mathbb{C}_2[X]$. D'après la condition (2.3), nous avons que G génère un semiflot de fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$ si et seulement si $\sup(\widetilde{G}(\mathbb{T})) \leqslant 0$. En outre $\sup(\widetilde{G}(\mathbb{T})) < 0$ si et seulement si

$$\det \begin{pmatrix} -\operatorname{Re}(a_1) \end{pmatrix} > 0, \quad \det \begin{pmatrix} -\operatorname{Re}(a_1) & -(\overline{a_0} + a_2) \\ -(\overline{a_2} + a_0) & -\operatorname{Re}(a_1) \end{pmatrix} > 0$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(a_1) < 0 \\ \operatorname{Re}(a_1)^2 - |\overline{a_0} + a_2|^2 = (\operatorname{Re}(a_1) - |\overline{a_0} + a_2|)(\operatorname{Re}(a_1) + |\overline{a_0} + a_2|) > 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{Re}(a_1) + |\overline{a_0} + a_2| < 0.$$

Exemple. Soit $G(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 \in \mathbb{C}_3[X]$. D'après la condition (2.3), nous avons que G génère un semiflot de fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$ si et seulement si $\sup(\widetilde{G}(\mathbb{T})) \leqslant 0$. En outre $\sup(\widetilde{G}(\mathbb{T})) < 0$ si et seulement si

$$\det \begin{pmatrix} -\operatorname{Re}(a_1) \end{pmatrix} > 0, \quad \det \begin{pmatrix} -\operatorname{Re}(a_1) & -(\overline{a_0} + a_2) \\ -(\overline{a_2} + a_0) & -\operatorname{Re}(a_1) \end{pmatrix} > 0,$$

et

$$\det\begin{pmatrix} -\operatorname{Re}(a_1) & -(\overline{a_0}+a_2) & -a_3 \\ -(\overline{a_2}+a_0) & -\operatorname{Re}(a_1) & -(\overline{a_0}+a_2) \\ -\overline{a_3} & -(\overline{a_2}+a_0) & -\operatorname{Re}(a_1) \end{pmatrix} > 0$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(a_1) < 0 \\ \operatorname{Re}(a_1)^2 - |\overline{a_0}+a_2|^2 = (\operatorname{Re}(a_1) - |\overline{a_0}+a_2|)(\operatorname{Re}(a_1) + |\overline{a_0}+a_2|) > 0 \\ (|a_3|^2 + 2|\overline{a_2}+a_0|^2 - \operatorname{Re}(a_1)^2)\operatorname{Re}(a_1) - 2\operatorname{Re}(a_3(\overline{a_2}+a_0)) > 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(a_1) + |\overline{a_0}+a_2| < 0 \\ (|a_3|^2 + 2|\overline{a_2}+a_0|^2 - \operatorname{Re}(a_1)^2)\operatorname{Re}(a_1) - 2\operatorname{Re}(a_3(\overline{a_2}+a_0)) > 0. \end{cases}$$

Bibliographie

[1] M. Abate : *Iteration theory of holomorphic maps on taut manifolds.* Research and Lecture Notes in Mathematics. Complex Analysis and Geometry. Mediterranean Press, Rende, 1989.

[2] M. Abate : The infinitesimal generators of semigroups of holomorphic maps. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 161:167–180, 1992.

[3] D. Aharonov, S. Reich et D. Shoikhet : Flow invariance conditions for holomorphic mappings in Banach spaces. *Math. Proc. R. Ir. Acad.*, 99A(1):93–104, 1999.

[4] L. Ahlfors : *Conformal invariants : topics in geometric function theory.* McGraw-Hill Book Co., New York-Düsseldorf-Johannesburg, 1973. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics.

[5] A. Aleman : Compactness of resolvent operators generated by a class of composition semigroups on H^p. *J. Math. Anal. Appl.*, 147(1):171–179, 1990.

[6] W. Arendt, C. J. K. Batty, M. Hieber et F. Neubrander : *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems*, vol. 96 de *Monographs in Mathematics.* Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, second édn, 2011.

[7] W. Arendt et A. F. M. ter Elst : From forms to semigroups. *In Spectral theory, mathematical system theory, evolution equations, differential and difference equations*, vol. 221 de *Oper. Theory Adv. Appl.*, p. 47–69. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2012.

[8] A. Arvanitidis : Semigroups of composition operators on Hardy spaces of the half-plane. http ://arxiv.org/abs/1109.5275.

[9] R. B. Ash : *Complex variables.* Academic Press, New York-London, 1971.

[10] C. Avicou, I. Chalendar et J. R. Partington : Analyticity and compactness of semigroups of composition operators. http ://arxiv.org/abs/1502.05576.

[11] C. Avicou, I. Chalendar et J. R. Partington : A class of quasicontractive semigroups acting on Hardy and Dirichlet space. *J. Evol. Equ.*, 15(3):647–665, 2015.

[12] M. Bakonyi et T. Constantinescu : *Schur's algorithm and several applications*, vol. 261 de *Pitman Research Notes in Mathematics Series.* Longman Scientific & Technical, Harlow ; copublished in the United States with John Wiley & Sons, Inc., New York, 1992.

[13] E. Berkson : Composition operators isolated in the uniform operator topology. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 81(2):230–232, 1981.

[14] E. Berkson et H. Porta : Semigroups of analytic functions and composition operators. *Michigan Math. J.*, 25(1):101–115, 1978.

[15] L. Carleson et T. W. Gamelin : *Complex dynamics*. Universitext : Tracts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1993.

[16] I. Chalendar et J. R. Partington : Norm estimates for weighted composition operators on spaces of holomorphic functions. *Complex Anal. Oper. Theory*, 8(5):1087–1095, 2014.

[17] M. D. Contreras, S. Díaz Madrigal et C. Pommerenke : On boundary critical points for semigroups of analytic functions. *Math. Scand.*, 98(1):125–142, 2006.

[18] M. D. Contreras et A. G. Hernández-Díaz : Weighted composition operators on Hardy spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 263(1):224–233, 2001.

[19] C. C. Cowen et B. D. MacCluer : *Composition operators on spaces of analytic functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.

[20] E. B. Davies : *Linear operators and their spectra*, vol. 106 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[21] P. L. Duren : *Theory of H^p spaces*. Pure and Applied Mathematics, Vol. 38. Academic Press, New York-London, 1970.

[22] O. El-Fallah, K. Kellay, J. Mashreghi et T. Ransford : *A primer on the Dirichlet space*, vol. 203 de *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2014.

[23] M. Elin, V. Goryainov, S. Reich et D. Shoikhet : Fractional iteration and functional equations for functions analytic in the unit disk. *Comput. Methods Funct. Theory*, 2(2):353–366, 2002.

[24] S. Elliott et M. T. Jury : Composition operators on Hardy spaces of a half-plane. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 44(3):489–495, 2012.

[25] K.-J. Engel et R. Nagel : *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, vol. 194 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000. With contributions by S. Brendle, M. Campiti, T. Hahn, G. Metafune, G. Nickel, D. Pallara, C. Perazzoli, A. Rhandi, S. Romanelli and R. Schnaubelt.

[26] E. A. Gallardo-Gutiérrez et A. Montes-Rodríguez : The role of the spectrum in the cyclic behavior of composition operators. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 167(791):x+81, 2004.

[27] E. A. Gallardo-Gutiérrez et J. R. Partington : Norms of composition operators on weighted Hardy spaces. *Israel J. Math.*, 196(1):273–283, 2013.

[28] J. B. Garnett : *Bounded analytic functions*, vol. 236 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, first édn, 2007.

[29] W. K. Hayman : On functions with positive real part. *J. London Math. Soc.*, 36:35–48, 1961.

[30] R. A. Horn et C. R. Johnson : *Matrix analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, second édn, 2013.

[31] G. Koenigs : Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 1:3–41, 1884.

[32] W. König : Semicocycles and weighted composition semigroups on H^p. *Michigan Math. J.*, 37(3):469–476, 1990.

[33] B. A. Lotto : A compact composition operator that is not Hilbert-Schmidt. *In Studies on composition operators (Laramie, WY, 1996)*, vol. 213 de *Contemp. Math.*, p. 93–97. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[34] M. J. Martín et D. Vukotić : Norms and spectral radii of composition operators acting on the Dirichlet space. *J. Math. Anal. Appl.*, 304(1):22–32, 2005.

[35] R. A. Martínez-Avendaño et P. Rosenthal : *An introduction to operators on the Hardy-Hilbert space*, vol. 237 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2007.

[36] J. R. Partington : *Interpolation, identification, and sampling*, vol. 17 de *London Mathematical Society Monographs. New Series*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1997.

[37] J. R. Partington : *Linear operators and linear systems*, vol. 60 de *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004. An analytical approach to control theory.

[38] A. Pazy : *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, vol. 44 de *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1983.

[39] G. Pisier : A remark on hypercontractive semigroups and operator ideals. http ://arxiv.org/abs/0708.3423.

[40] C. Pommerenke : *Boundary behaviour of conformal maps*, vol. 299 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[41] W. Rudin : *Analyse réelle et complexe*. Masson, Paris, 1980. Translated from the first English edition by N. Dhombres and F. Hoffman, Third printing.

[42] E. Schröder : Ueber iterirte Functionen. *Math. Ann.*, 3(2):296–322, 1870.

[43] J. Schur : Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind. *J. Reine Angew. Math.*, 147:205–232, 1917.

[44] J. H. Shapiro : *Composition operators and classical function theory*. Universitext : Tracts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1993.

[45] J. H. Shapiro et P. D. Taylor : Compact, nuclear, and Hilbert-Schmidt composition operators on H^2. *Indiana Univ. Math. J.*, 23:471–496, 1973/74.

[46] D. Shoikhet : *Semigroups in geometrical function theory*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[47] A. G. Siskakis : Weighted composition semigroups on Hardy spaces. *In Proceedings of the symposium on operator theory (Athens, 1985)*, vol. 84, p. 359–371, 1986.

[48] A. G. Siskakis : On a class of composition semigroups in Hardy spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 127(1):122–129, 1987.

[49] A. G. Siskakis : Semigroups of composition operators on the Dirichlet space. *Results Math.*, 30(1-2):165–173, 1996.

[50] A. G. Siskakis : Semigroups of composition operators on spaces of analytic functions, a review. *In Studies on composition operators (Laramie, WY, 1996)*, vol. 213 de *Contemp. Math.*, p. 229–252. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[51] G. A. Sviridyuk et V. E. Fedorov : *Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators*. Inverse and Ill-posed Problems Series. VSP, Utrecht, 2003.

Semigroupes d'opérateurs de composition sur des espaces de Hardy pondérés

Résumé : Cette thèse se situe à l'intersection de plusieurs domaines mathématiques particulièrement actifs actuellement : l'analyse fonctionnelle, la théorie des opérateurs, la dynamique complexe et la théorie des semigroupes. Nous étudierons ici les semigroupes d'opérateurs de composition sur quelques espaces de Hardy pondérés, notamment l'espace de Hardy du disque et l'espace de Dirichlet.
Dans un premier temps, nous allons voir pourquoi se placer à cette intersection est pertinent, en montrant comment utiliser les propriétés des semigroupes pour calculer explicitement les normes de certains opérateurs de composition.
Dans un second temps, nous étudierons les propriétés des semigroupes d'opérateurs de compositions qui sont directement accessibles à partir de la seule donnée du générateur infinitésimal du semigroupe, en nous concentrant tout particulièrement sur les notions d'analyticité et de compacité.

Mots clés : Opérateur de composition ; Espace de Hardy ; Semigroupe ; Semiflot ; Compacité ; Analyticité.

Semigroups of composition operators on weighted Hardy spaces

Abstract : This thesis takes place at the intersection of several particularly active mathematical areas : functional analysis, operator theory, complex dynamics and theory of semigroups. Here, we study semigroups of composition operators on some weighted Hardy spaces, in particular the Hardy space of the disk and the Dirichlet space.
First, we will show why this intersection is relevant for our study, pointing out how to use the properties of semigroups to explicitly compute the norms of some composition operators.
Secondly, we will study the properties of semigroups of composition operators that are directly accessible from the only data of the infinitesimal generator, focusing on analyticity and compactness.

Keywords : Composition operator ; Hardy space ; Semigroup ; Semiflow ; Compactness ; Analyticity.

Image en couverture : image du disque unité par les fonctions $\varphi_t : z \mapsto e^{-ct}z$, $\chi_t : z \mapsto 1-(1-z)^{e^{-t}}$ et $\psi_t : z \mapsto e^{-t}z + 1 - e^{-t}$ pour des valeurs de t croissantes.